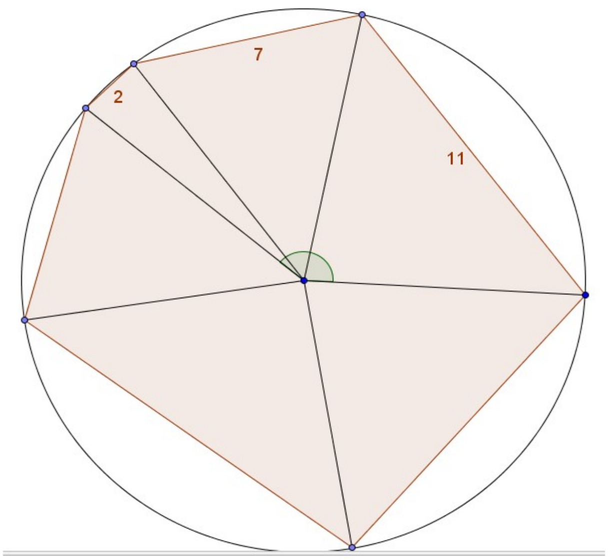
Six points sur un cercle - publié le 14/10/2012

Sujet n°2 (moyen)

On considère six points situés sur un cercle de rayon R. Les longueurs des segments qui joignent deux points consécutifs mesurent 2 ;7 et 11. Chaque mesure est utilisée deux fois. Calculer le rayon du cercle.

Remarquons d'emblée que le rayon doit être supérieur à 5,5 (inégalité triangulaire).
Nous allons montrer qu'**il est égal à 7** quelque soit le cas de figure.



Notons $\alpha_{11}=2\arcsin\left(\frac{11}{2R}\right)$

$\alpha_7=2\arcsin\left(\frac{7}{2R}\right)$

$\alpha_2=2\arcsin\left(\frac{2}{2R}\right)$

Ce sont les mesures en radians des angles au centre interceptant les cordes de longueur 11 7 et 2.

On a donc : $2(\alpha_{11}+\alpha_7+\alpha_2)=2\pi$

(quelque soit l'ordre relatif des cordes sur le cercle, ce qui n'était pas évident)

Soit, pour x>5,5 :

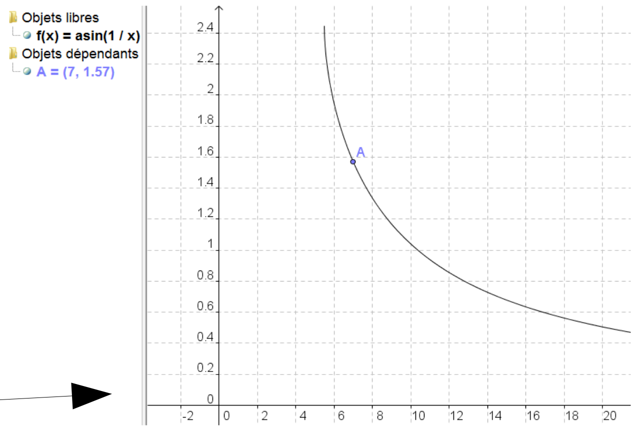
$$f(x)=\arcsin\left(\frac{11}{2x}\right)+\arcsin\left(\frac{7}{2x}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) ,$$

Il nous suffit de montrer que l'équation

$$f(x)=\frac{\pi}{2}$$

a une **unique solution** qui est 7.

On peut le constater rapidement graphiquement.



Pour démontrer l'unicité , il suffit de voir que la dérivée est strictement négative.

$$f'(x)=-\frac{11}{2x^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{11}{2x}\right)^2}}-\frac{7}{2x^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{7}{2x}\right)^2}}-\frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

donc $f'(x)<0$ pour tout x>5,5

D'où le tableau de variation

x	5,5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	2,4.. ↘	0

La fonction f étant continue, $f(5,5)\approx 2,4$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu' il existe un seul antécédent R pour $\frac{\pi}{2}$ (environ 1,57).

Il reste à prouver que f(7) = $\frac{\pi}{2}$ ce qui est équivalent à prouver que $\sin(f(7))=1$

On peut utiliser la formule trigo (*qui se démontre à l'aide des complexes par exemple*)

$$\sin(a+b+c)$$
$$= -\sin(a)\sin(b)\sin(c)+\cos(a)\cos(b)\sin(c)+\cos(a)\sin(b)\cos(c)+\sin(a)\cos(b)\cos(c)$$

Sachant qu'ici $a=arsin\left(\frac{11}{14}\right)$ $b=arsin\left(\frac{1}{2}\right)$ et $c=arsin\left(\frac{1}{7}\right)$

$$\sin(a)=\frac{11}{14} \qquad \sin(b)=\frac{1}{2} \qquad \sin(c)=\frac{1}{7}$$

$$\cos(a) = \sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14} \qquad \cos(b)=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(c)=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

On en déduit que $\sin(f(7))=\frac{-11}{14^2}+\frac{15}{14^2}+\frac{60}{14^2}+\frac{132}{14^2} = \frac{196}{14^2}$ =1 donc f(7) = $\frac{\pi}{2}$

Le rayon du cercle est donc bien 7. Vérification en image :