



Ce problème est proposé par Frédéric De Lig

• **Enoncé**

On lance une pièce parfaitement équilibrée jusqu'à obtenir "Face" deux fois de suite. Combien de lancers en moyenne va-t-on effectuer ?

Soit  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers au bout duquel on voit apparaître FF.  $X$  peut donc prendre des valeurs  $k$  entières supérieures ou égales à 2.

On cherche l'espérance  $E(X)$ , dont on suppose l'existence dans l'énoncé.

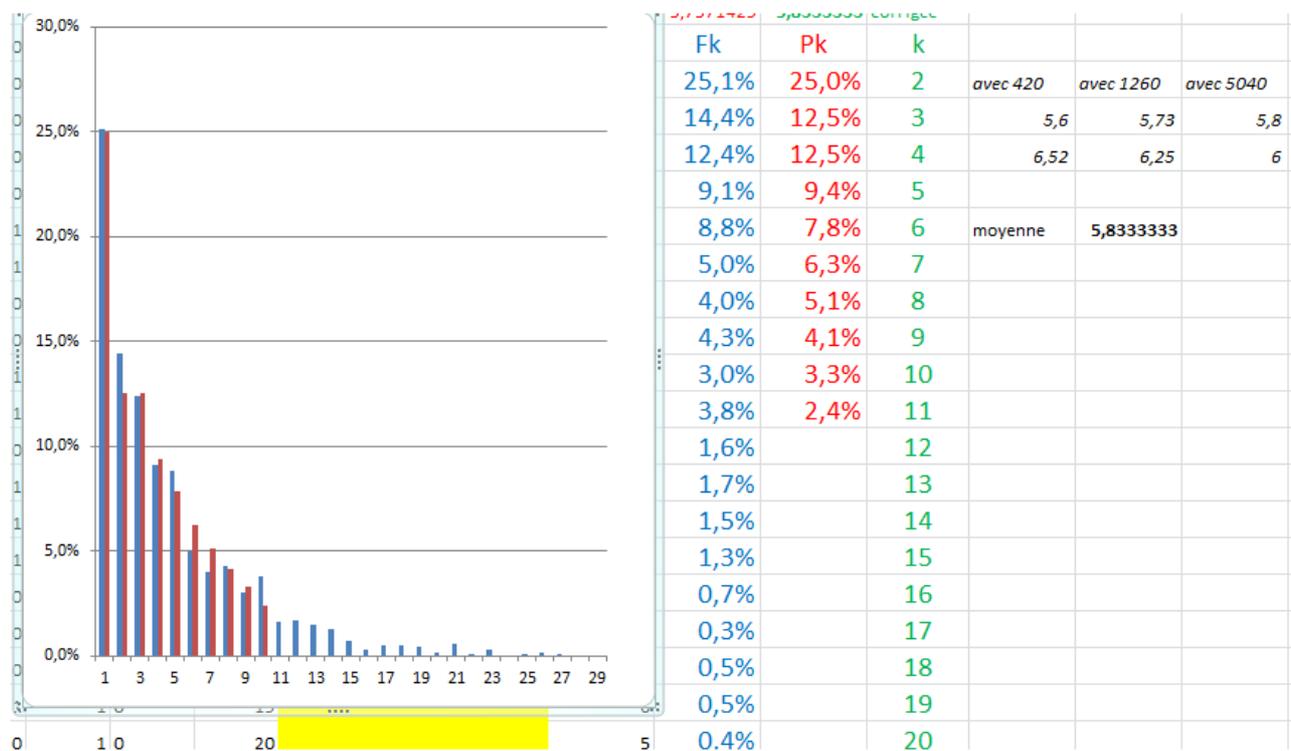
Pour cela, on aimerait bien connaître la probabilité  $P_k = P(X = k)$

En s'aidant d'arbres, de schémas et avec un peu de patience, on trouve successivement (à partir de 3 lancers, la série obtenue termine par PFF)

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P_k$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{256}$	$\frac{21}{256}$	$\frac{34}{1024}$	$\frac{49}{2048}$

Hélas, malgré bien des efforts, je n'arrive toutefois pas à trouver une relation permettant de calculer  $P_k$  en fonction de  $k$ .

A l'aide du tableur, je me livre donc à une simulation (un peu artisanale) de plusieurs milliers de parties. (ci dessous 1260)



Pour  $k$  allant de 2 à 11, je retrouve bien des fréquences  $F_k$  fluctuantes et proches des probabilités calculées au dessus: c'est rassurant.

Je calcule alors la moyenne  $E = \sum_{k=2}^{k=+\infty} k \times F_k$

(remarque: je ne somme bien sur qu'un nombre fini de termes:  
ici j'ai choisi 30, cela me suffit pour la précision souhaitée)

Bien sur, la moyenne E obtenue fluctue aussi:

Avec 420 parties :  $5,6 < E < 6,5$

Avec 1260 parties :  $5,7 < E < 6,3$

Avec 5040 parties :  $5,8 < E < 6,1$

En relançant la simulation, plusieurs dizaines de fois, j'observe que la moyenne est "souvent très proche" de la valeur 6.

**Je propose donc comme réponse: 6 lancers en moyenne.**

*D'après les calculs des probabilités que j'ai fait ( et confirmé par l'expérience)*

*Dans 50% des cas, on aura obtenu FF avant le 5ème lancer.*

*Dans 67% des cas, on aura obtenu FF avant le 7ème lancer.*

*Dans 88% des cas, on aura obtenu FF avant le 12ème lancer.*

*Il est rare d'avoir évité FF au bout de 30 lancers: Moins de 1% des cas (valeur constatée par simulation)*

**Je n'ai pas résolu le problème de manière exacte mais j'ai les informations nécessaires pour parier ou non, sur un jeu de hasard lié à cette expérience.**

Par exemple:

On gagne k euros, si on obtient FF au kème lancer.

On paye 5 euros pour tenter sa chance.

Je peux accepter de jouer car l'espérance de gain est plus grande que le prix à payer.