Trois points sur un cube. - publié le 08/05/2012

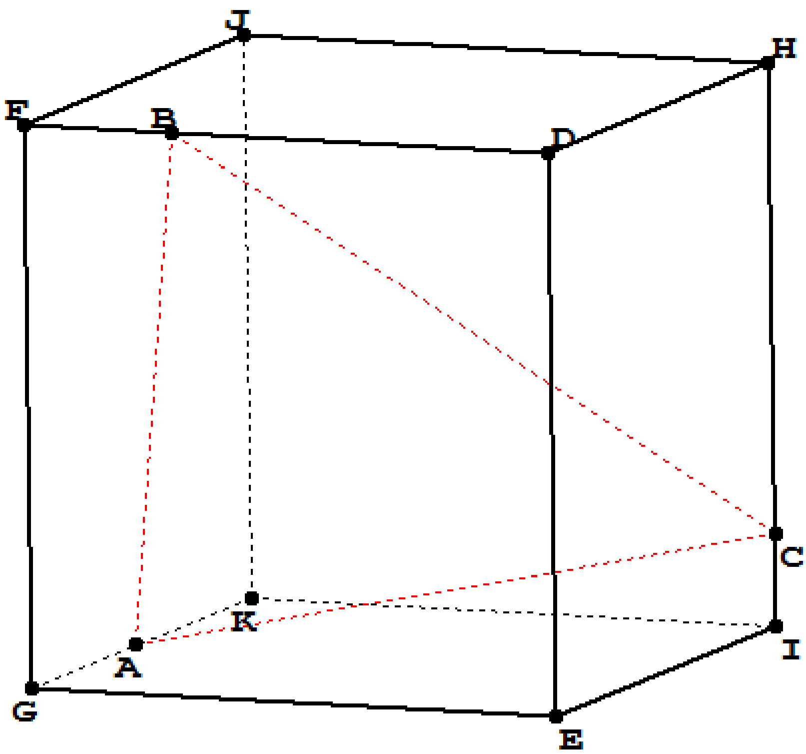
Sujet n°17

Soient A, B et C trois points distincts situés sur trois arêtes distinctes non coplanaires d'un cube.
Déterminer la position de ces trois points pour que le périmètre du triangle ABC soit minimum.

Je me place dans un repère de centre 0, le centre du cube de sorte que les huit sommets aient pour coordonnées (+/-1;+/-1;+/-1). Le cube a donc ici pour côté 2.Peu importe.

Les points A B C sont sur des arêtes non coplanaires deux à deux (sinon le périmètre minimum pourraitêtre nul, et le problème posé devient alors trivial).

Je suppose donc que A(a;-1;-1) B(1;b;1) et C(-1;1;c) où a,b et c sont dans l'intervalle [-1;1].

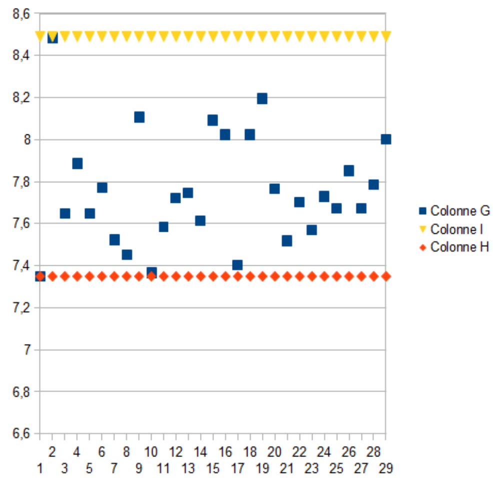


Le problème posé revient ainsi à trouver le minimum de la fonction de trois variables:
f(a,b,c) = AB+BC+AC = $\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2+2^2}+\sqrt{2^2+(b-1)^2+(c-1)^2}+\sqrt{(a+1)^2+2^2+(c+1)^2}$

On sent bien que ce minimum est f(0,0,0) = $3\sqrt{6}$ pour des raisons de symétrie du problème.
Mais comment en être certain?
Le calcul des dérivées partielles puis la recherche des points qui les annulent ne parait guère très astucieuse ni attrayante...

Je vais donc utiliser **un argument probabiliste** qui peut certes prêter au débat:
Au tableur, je tire a b c au hasard dans l'intervalle [-1;1] grâce à la commande 2*(ALEA()-0,5)
Puis je calcule pour chaque triplet obtenu la valeur de f(a,b,c).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**a**	**b**	**c**	**AB²**	**BC²**	**AC²**	**Périmètre**	**min**	**max**
2	0	0	0	6	6	6	7,35	7,35	8,49
3	1	1	-1	8	8	8	8,49	7,35	8,49
4	-0,68	0,7	-0,22	9,72	5,57	4,71	7,65	7,35	8,49
5	0,48	-0,88	0,79	4,29	7,57	9,39	7,89	7,35	8,49
6	0,27	0,64	-0,53	7,23	6,48	5,83	7,65	7,35	8,49
7	0,71	-0,28	0,9	4,6	5,65	10,55	7,77	7,35	8,49
8	-0,04	0,52	-0,46	7,4	6,37	5,2	7,52	7,35	8,49
9	-0,46	0,23	-0,26	7,66	6,19	4,83	7,45	7,35	8,49
10	0,83	-0,85	1	4,05	7,44	11,35	8,11	7,35	8,49
11	-0,14	0,07	0,17	6,44	5,55	6,12	7,37	7,35	8,49
12	-0,05	-0,16	-0,84	5,81	8,73	4,93	7,58	7,35	8,49
13	-0,62	-0,71	-0,53	6,7	9,25	4,37	7,72	7,35	8,49
14	-0,73	0,5	-0,69	9,24	7,11	4,17	7,75	7,35	8,49
15	0,2	-0,43	0,75	4,97	6,1	8,49	7,61	7,35	8,49
16	-0,77	-0,84	0,78	7,17	7,43	7,23	8,09	7,35	8,49
17	0,92	0,23	-0,96	5,53	8,42	7,67	8,02	7,35	8,49
18	-0,13	-0,37	-0,08	5,67	7,04	5,61	7,4	7,35	8,49
19	0,92	0,27	-0,94	5,61	8,29	7,71	8,02	7,35	8,49
20	-0,98	0,89	-0,97	11,47	7,88	4	8,2	7,35	8,49
21	0,92	-0,59	-0,29	4,18	8,18	8,2	7,77	7,35	8,49
22	-0,22	-0,23	0,59	6,08	5,68	7,12	7,52	7,35	8,49
23	-0,89	0,58	0,22	10,04	4,78	5,51	7,7	7,35	8,49
24	-0,43	0,39	0,58	7,96	4,55	6,83	7,57	7,35	8,49
25	-0,74	-0,34	0,57	7,45	5,97	6,54	7,73	7,35	8,49
26	0,67	0,56	-0,27	6,53	5,8	7,33	7,67	7,35	8,49
27	0,96	0,23	0,85	5,5	4,62	11,26	7,85	7,35	8,49
28	-0,33	-0,35	0,78	6,2	5,86	7,63	7,67	7,35	8,49
29	0,49	0,63	0,87	6,91	4,16	9,73	7,79	7,35	8,49
30	-0,81	-0,75	0,68	7,35	7,15	6,84	8	7,35	8,49



En observant les valeurs obtenues avec quelques milliers de tirages(*ci dessus j'en ai mis 30 en guise d'illustration, mais on peut en simuler autant qu'on en veut*), je constate qu'elles sont toutes comprises entre 7,35 et 8,49 ce qui correspond aux valeurs:

$3\sqrt{6}$ =f(0,0,0) obtenue **lorsque A B et C sont les milieux de leurs arêtes**

et $6\sqrt{2}$ =f(1;1;-1) obtenue lorsque A B C sont sur les sommets du cube.

J'en déduis qu'il serait plus qu'improbable que f prenne des valeurs plus extrèmes...

C'est une "preuve" qui peut convaincre et qui est dans l'esprit des programmes actuels, même si ce n'est pas une "démonstration " rigoureuse ...

Ma conclusion est donc de choisir A B et C au milieu des arêtes [GK] [ED] et [IH].

Notons que contrairement au minimum, le maximum est très rarement atteint, la distribution des valeurs n'est pas uniforme...affaire à creuser.

p: 7.35