# TP info Mathématiques

Première S – Lycée Vieljeux

## Problématique

Le théorème de Pythagore permet de caractériser les triangles rectangles : $ABC$ est rectangle en $B$ équivaut à $AC^2 = AB^2 + BC^2$, c'est-à-dire $AC^2 - AB^2 - BC^2 = 0 \quad [1]$.
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$.
Démontrer que l'égalité [1] se traduit par

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = 0$$

Ainsi la nullité du réel $d = \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$ traduit le fait que l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs est droit.
Dans ce cas, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux**.
On se pose alors la question suivante :
Comment se comporte la quantité $d = \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$ lorsque le triangle n'est pas rectangle en $B$ ?

## Expérimentation avec GeoGebra

1. Construire un triangle $ABC$, à l'aide de l'icône en respectant la contrainte suivante : les points $A$ et $B$ sont situés sur l'axe des abscisses.
   *Aide* : Pour placer un point sur l'axe des abscisses, deux possibilités :
   – avec la souris, placer votre point $A$ directement sur l'axe des abscisses,
   – dans la barre de saisie, écrire A=point[axeX]
2. Créer un affichage permettant d'afficher le réel $d$.
   *Aide* :
   – écrire dans la barre de saisie $d = b^2 - a^2 - c^2$ afin de créer le réel $d$, en ayant vérifié dans la fenêtre Algèbre, que les trois réels $a$, $b$, $c$ correspondaient aux longueurs respectives $BC$, $AC$, $AB$.
   – utiliser l'icône ABC, une fenêtre de dialogue s'ouvre et écrire alors "d="+d
3. Observer l'évolution du réel $d$ en fonction de la position du point $C$.
   (a) Quand $d$ est-il positif, nul, négatif ?
   (b) Quel est le lieu des points $C$ tels que $d$ reste constant ?
   *Aide* : On peut piloter la position du point $C$ à l'aide
   – des flèches du clavier : prendre l'icône et cliquer sur $C$
   – de la souris, mais ici, on suivra “moins” l'évolution de $d$.
4. Construire le projeté orthogonal $H$ du point $C$ sur la droite $(AB)$ afin de préciser les réponses de la question précédente.
   *Aide* :
   – À l'aide de l'icône , tracer la hauteur issue de $C$ du triangle $ABC$ et ensuite à l'aide de , placer le point $H$.
5. Définir la longueur $BH$ en écrivant dans la barre de saisie h=distance[B,H], et conjecturer une relation entre le réel $d$ et les longueurs $AB$ et $BH$.
   *Indication* : On pourra créer un affichage permettant de visualiser $2.AB.BH$.
6. Créer l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{BC}\right)$ et conjecturer une relation liant le réel $d$, les longueurs $AB$, $BC$ et $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{BC}\right)$.
   *Indication* :
   – On placera d'abord un point $D$ sur la droite $(AB)$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ soient de même sens.
   – À l'aide de l'icône , cliquer successivement sur les points $D$, $B$, $C$.
   – Ou en écrivant dans la barre de saisie Angle[D,B,C], clique droit Propriétés, Basique, Afficher Nom et Valeur.
   – On pourra créer un affichage permettant de visualiser le réel $2.AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{BC}\right)$.

# Démonstration

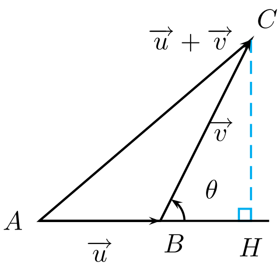


FIG. 1 – Cas 1

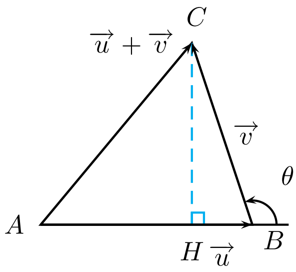


FIG. 2 – Cas 2

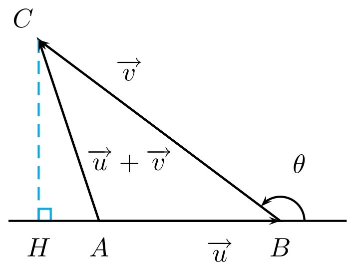


FIG. 3 – Cas 3

Pour chacune des figures ci-dessus, démontrer que

$$d = AC^2 - AB^2 - BC^2 = AH^2 - AB^2 - BH^2 \quad [2]$$

1. On s'intéresse à la figure 1 : $A$, $B$ et $H$ alignés dans cet ordre donc $AH = AB + BH$.
   (a) Déduire de [2] que $d = 2AB \times BH$.
   (b) Démontrer alors que $d = 2AB \times BC \cos\theta$.
2. On s'intéresse à la figure 2 : $A$, $H$ et $B$ alignés dans cet ordre donc $AH = AB - BH$.
   (a) Déduire de [2] que $d = -2AB \times BH$ et que $BH = BC\cos(\pi - \theta)$.
   (b) En déduire que $d = 2AB \times BC \cos\theta$.
3. On s'intéresse maintenant à la figure 3.
   – Reprendre les questions précédentes pour démontrer que $d = 2AB \times BC \cos\theta$.

# Conclusion

Le nombre $\dfrac{d}{2}$ qui est indépendant des cas de figures est appelé **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$. On le note $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$. Ce produit scalaire s'exprime pour l'instant de deux manières :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u+v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right] \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$$

Ainsi cette opération, qui à deux vecteurs non colinéaires associe un réel, dépend uniquement des normes des vecteurs et de leur angle.

# 1 Thème et contexte

1. Ce TP est destiné aux élèves de Première S.
2. Introduire le produit scalaire.

# 2 Objectifs du TP

1. Découvrir le produit scalaire en Première S.
2. Apprendre à utiliser le logiciel de géométrie GeoGebra.
   C'était la seconde séance d'utilisation du logiciel en classe.

# 3 Logiciel utilisé

Le logiciel de géométrie dynamique : GeoGebra

# 4 Déroulement du TP

## 4.1 Lieu

Salle informatique du lycée

## 4.2 Cadre

Un élève par poste (ou presque, car 26 postes pour 31 élèves)

## 4.3 Durée

2 heures et finir la démonstration à la maison si elle ne l'est pas.

## 4.4 Prolongement possible

1. Vérifier avec le logiciel GeoGebra que le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ des deux vecteurs peut être calculé directement en écrivant dans la barre de saisie : p=vecteur[A,B]*Vecteur[B,C].
2. Vérifier et démontrer la formule du produit scalaire à l'aide des coordonnées des vecteurs dans un repère orthonormé.

# 5 Informations pratiques sur le fichier TeX

## 5.1 Icônes

Pour obtenir les icônes des menus de geoGebra, il faut :
– télécharger geogebra.jar sur GeoGebra
– extraire ce fichier geogebra.jar
– les icônes se trouvent alors dans le répertoire /gui/images/
Ces icônes sont converties au format eps afin de les insérer dans le fichier pour une compilation LaTeX–dvips–ps2pdf.

## 5.2 Structure du fichier

Le fichier maître TP_scal.tex appelle à la compilation les différents fichiers suivants :
– XTpreambule(.sty) : fichier style,
– prod_problematique.tex : expose la problématique du TP,
– prod_expe.tex : expose l'expérimentation avec GeoGebra, et propose une aide sur le logiciel,
– prod_demo.tex : la démonstration,
– prod_fig.tex : fichier contenant les trois cas de figure du triangle $ABC$,
– prod_conclusion.tex : la conclusion,
– TP_scal_commentaire.tex : fiche commentaire.

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr