SUJET 2

Remarquons que : $\frac{n(n+1)}{2} = 2023066$ a pour solution n =2011

Remarquons d'autre part que pour tout entier n : $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$

Ainsi S peut s'écrire :

$$S = \frac{1}{\frac{2}{1}-\frac{2}{2}} + \frac{1}{(\frac{2}{1}-\frac{2}{2})+(\frac{2}{2}-\frac{2}{3})} + \frac{1}{(\frac{2}{1}-\frac{2}{2})+(\frac{2}{2}-\frac{2}{3})+(\frac{2}{3}-\frac{2}{4})} + \ldots\ldots\ldots + ¿$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots+ \frac{1}{(\frac{2}{1}-\frac{2}{2})+(\frac{2}{2}-\frac{2}{3})+(\frac{2}{3}-\frac{2}{4})+\ldots\ldots\ldots+(\frac{2}{2011}-\frac{2}{2012})}$$

Après simplification de presque tous les termes aux dénominateurs:

$$S = \frac{1}{2-\frac{2}{2}} + \frac{1}{2-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2-\frac{2}{4}} + \ldots\ldots + \frac{1}{2-\frac{2}{2012}} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{2011} \frac{1}{1-\frac{1}{p+1}} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{2011} \frac{p+1}{p}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{1}^{2011} (1+\frac{1}{p}) = \frac{2011}{2} + \frac{1}{2}\sum_{1}^{2011} \frac{1}{p}$$

Or $\sum_{1}^{2011} \frac{1}{p} > \int_{1}^{2012} \frac{1}{x}\,dx = \ln(2012)$

Donc $S > 1005{,}5 + \frac{1}{2}\ln(2012)$ donc S > 1009>1008

Philippe Bondon