Une jolie inégalité : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos^2 (x_i - x_j) \geqslant \frac{n(n-2)}{4}$

<u>Preuve</u> :

Posons $S = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos^2 (x_i - x_j)$

• On a par symétrie $S = \displaystyle\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \cos^2 (x_i - x_j)$ de sorte que

$$2S + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \cos^2 (x_i - x_i) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n \text{ et } 1\leqslant j\leqslant n} \cos^2 (x_i - x_j) = S_t$$

$$2S + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \cos^2 (0) = S_t$$

$$\mathbf{2S + n = S_t}$$

• En transformant $\cos^2 (x_i - x_j)$ en $\dfrac{1 + \cos(2(x_i - x_j))}{2}$ dans S_t, on obtient

$$S_t = \sum_{1\leqslant i\leqslant n \text{ et } 1\leqslant j\leqslant n} \frac{1 + \cos(2(x_i - x_j))}{2} = \sum_{1\leqslant i\leqslant n \text{ et } 1\leqslant j\leqslant n} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{1\leqslant i\leqslant n \text{ et } 1\leqslant j\leqslant n} \cos(2(x_i - x_j))$$

$$S_t = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} S' \text{ où } S' = \sum_{1\leqslant i\leqslant n \text{ et } 1\leqslant j\leqslant n} \cos(2(x_i - x_j))$$

• En admettant, un court instant, que S' soit positif, on obtient alors :

$$2S + n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} S'$$

$$2S + n \geqslant \frac{1}{2} n^2$$

D'où le résultat $\mathbf{S} \geqslant \dfrac{\mathbf{n(n-2)}}{\mathbf{4}}$

■

Il reste à prouver que $S' = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n \text{ et } 1\leqslant j\leqslant n} \cos(2(x_i - x_j))$ est positif.

On a $S' = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \cos(2x_i)\cos(2x_j) + \sin(2x_i)\sin(2x_j) \right)$

$$S' = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \cos(2x_i) \times \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \cos(2x_j) + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sin(2x_i) \times \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \sin(2x_j)$$

$$S' = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \cos(2x_i) \right)^2 + \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sin(2x_i) \right)^2 \geqslant 0$$

■

Olivier Rochoir