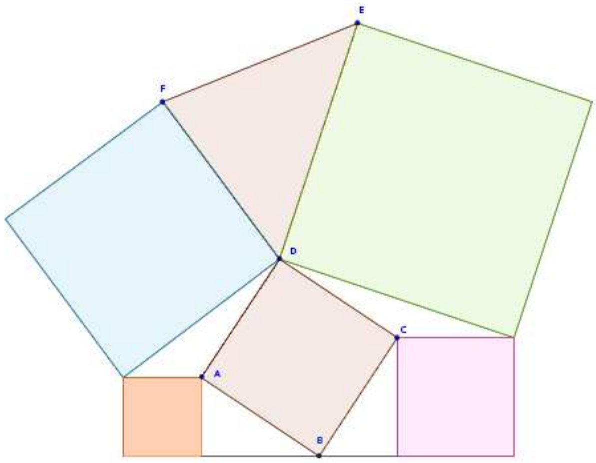
<u>Et pourtant ils ont la même aire !</u> (Sujet n° 11)

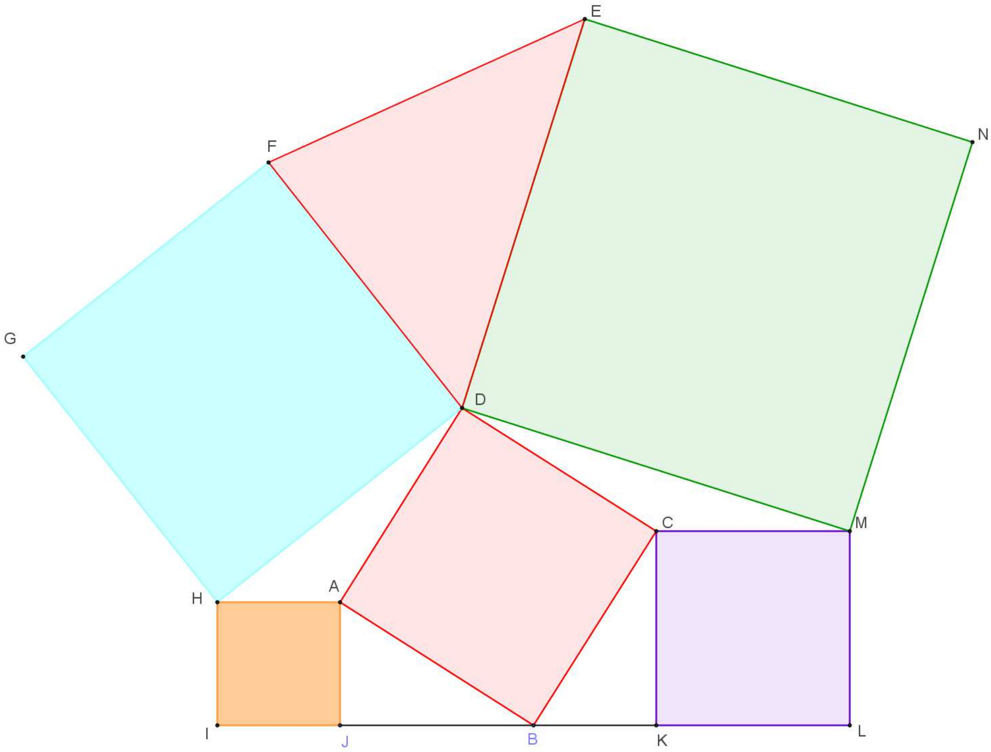
<u>Énoncé :</u>

On considère cinq carrés, comme le montre la figure ci-dessous. Montrer que le triangle FED et le carré ABCD ont la même aire.



<u>Solution</u> :

On complète la figure de l'énoncé avec quelques notations.
Le coté du carré AHIJ sera noté a, celui de CKLM sera noté b, celui de ABCD sera noté c, celui de DFGH sera noté d et enfin celui de DMNE sera noté e. Enfin on note $\alpha = \widehat{EDF}$, $\beta = \widehat{HDA}$ et $\gamma = \widehat{CDM}$.



On utilisera les deux résultats suivants :

> **L'aire d'un triangle ABC est donnée par $S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \widehat{BAC}$**
>
> **La formule d'Al-Kashi : $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \cos \widehat{C}$.**

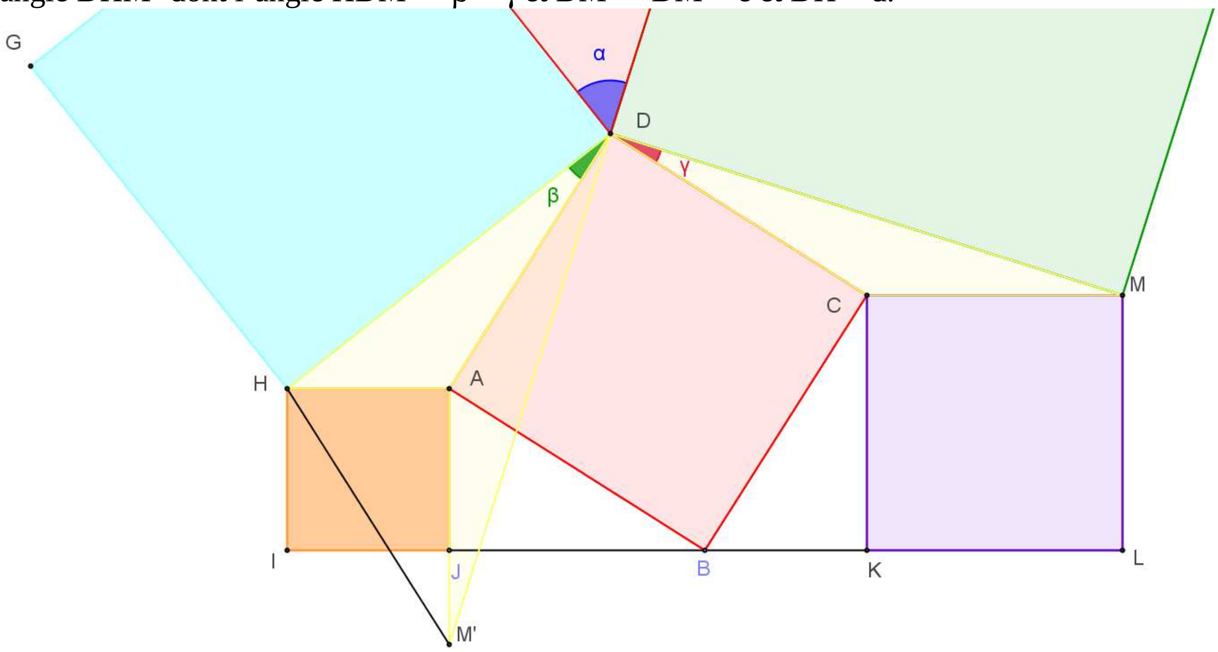
• Les triangles BAJ et BCK étant isométrique, on en déduit que JB = b et donc que $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$. ❶

• Posons S l'aire du triangle FED. On a alors $S = \frac{1}{2} DF \times DE \times \sin \widehat{EDF}$ ou encore $S = \frac{1}{2}$ de sin α.

En considérant tous les angles autour du point D, on a α + 90 + β +90 + γ + 90 =360°.

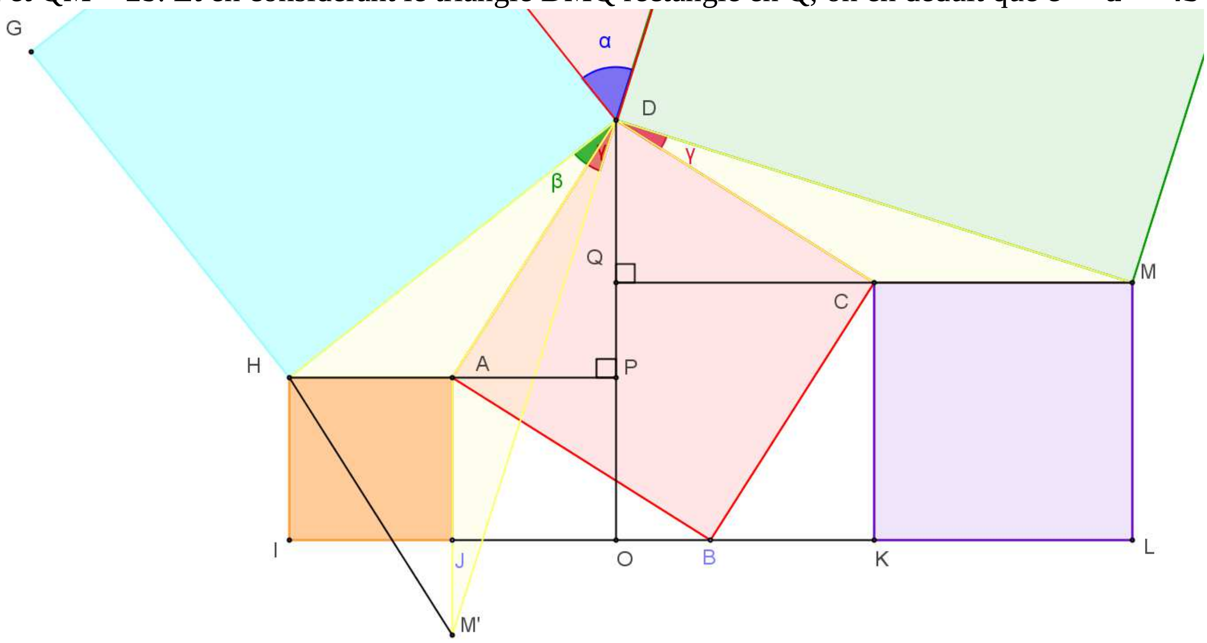
Donc α = 90 – (β + γ) et $S = \frac{1}{2}$ de sin(90 – (β + γ)) donc $\mathbf{S = \frac{1}{2}}$ **de cos(β + γ).** ❷

• Par une rotation de centre D et d'angle 90°, le triangle DCM est transformé en DAM'. On obtient alors un triangle DHM' dont l'angle HDM' = $\beta + \gamma$ et DM' = DM = e et DH = d.



De plus puisque AM' = CM = b et que AH = a, on a HM' = $\sqrt{a^2 + b^2}$ = c.
En utilisant la relation d'Al-Kashi dans ce triangle, on a **$c^2 = d^2 + e^2 - 2de\cos(\beta + \gamma)$.** ❸

• Par la rotation de centre A et d'angle 90°, le triangle ABJ est transformé en ADP. On en déduit que BD = b et HP = 2a. Donc en considérant le triangle DHP rectangle en P, on en déduit que **$d^2 = b^2 + 4a^2$** . ❹
Par la rotation de centre C et d'angle -90°, le triangle CBK est transformé en CDQ. On en déduit que QD = a et QM = 2b. Et en considérant le triangle DMQ rectangle en Q, on en déduit que **$e^2 = a^2 + 4b^2$** . ❺



En conclusion, on a alors :

D'après ❸ : $c^2 = d^2 + e^2 - 2de\cos(\beta + \gamma)$
D'après ❷ : $de\cos(\beta + \gamma) = 2S$
Donc $c^2 = d^2 + e^2 - 4S$
D'après ❹ et ❺ : $c^2 = b^2 + 4a^2 + a^2 + 4b^2 - 4S$
$c^2 = 5(a^2 + b^2) - 4S$.
D'après ❶ : $c^2 = 5c^2 - 4S$.
On en déduit que $S = c^2$ c'est-à-dire **l'aire du triangle FED est égale à l'aire du carré ABCD**.

Olivier Rochoir