<u>Ma grand-mère est une magicienne !</u> (Sujet n° 7)

<u>Énoncé :</u>

Ma grand-mère est un peu magicienne. Elle aligne n cartes numérotées de 1 à n, faces cachées, sur une table, et elle me propose de prélever des cartes qui se suivent parmi elles pendant qu'elle me tourne le dos. Puis elle me demande de lui annoncer la somme des nombres inscrits sur ces cartes ; je lui dis :" 2013 !". Après quelques instants, elle me donne les numéros des cartes que j'avais entre les mains. A-t-elle eu de la chance ? Comment a-t-elle fait ?

<u>Solution</u> (rapide) :

• Supposons que je prenne 2 cartes et notons p la plus petite des deux. L'autre est alors p+1 et la somme fait 2p+1. Il faut donc résoudre 2p+1=2013 qui donne p = 1006. Il est donc possible d'obtenir 2013 en tirant 2 cartes consécutives : 1006 et 1007. A noter qu'il est possible d'obtenir n'importe quel nombre impair à l'aide de deux cartes consécutives..

• Supposons que je prenne 3 cartes et notons p la plus petite des trois. La somme de ces trois cartes est donc p+(p+1)+(p+2) = 3p + 6. Or l'équation 3p+6 = 2013 donne p = 669 comme solution. Il est donc possible d'obtenir 2013 en ajoutant les trois cartes consécutives 669, 670 et 671.

☞ Grand-mère a donc eu de la chance de trouver les bonnes cartes car il y a déjà deux possibilités :
(1006 ; 1007) et (669 ; 670 ; 671).

<u>Solution</u> (complète) :

• En généralisant avec k cartes et en notant toujours p la plus petite, la somme S = 2013 vaut :

$$S = p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+k-1)$$

Ce qui donne $S = kp + \frac{k(k-1)}{2}$.

Pour trouver toutes les possibilités, il suffit alors de calculer la différence $2013 - \frac{k(k-1)}{2}$ et de vérifier que celle-ci est divisible par k (si c'est le cas, on trouvera p le plus petit des k nombres)

Autrement dit, **on cherche les diviseurs k de $2013 - \frac{k(k-1)}{2}$**.

Puisque $2013 - \frac{k(k-1)}{2}$ doit être positive, on doit avoir $k \in \left[\frac{1-\sqrt{16105}}{2} ; \frac{1+\sqrt{16105}}{2}\right]$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Donc **$k \in \{1 ; 2 ; 3 ; \dots . 63\}$**

• Si k est impair, $\frac{k(k-1)}{2}$ est divisible par k puisque $\frac{k-1}{2}$ est entier. Donc si k est impair et divise $2013 - \frac{k(k-1)}{2}$, il doit diviser $2013 = 3\times11\times61$.

On en déduit que les diviseurs impairs de $2013 - \frac{k(k-1)}{2}$ sont k = 1 ; 3 ; 11 ; 61 ; 33.

• Et les diviseurs pairs ?

Si k = 2, on a $2013 - \frac{k(k-1)}{2} = 2012$ qui est divisible par 2.

Si k est de la forme $2^2 \times m$ (avec m entier), alors $2013 - \frac{k(k-1)}{2} = 2013 - 2m(2^2 m - 1)$ qui est un nombre impair (différence entre un impair et un pair). Ce nombre ne peut donc pas être divisible par le nombre pair $k = 2^2 m$.

Donc les seuls diviseurs pairs sont de la forme 2m avec m impair. Précisons la valeur de m :

Si k = 2m (avec m impair), on a $2013 - \frac{k(k-1)}{2} = 2013 - m(2m-1)$ qui est bien divisible par 2 (différence de deux nombres impairs). Si de plus m divise ce nombre cela signifie que m divise 2013 (donc m = 1 ; 3 ; 11 ; 61 ; 33 sont les seuls inférieurs à 63)

On en déduit que **les diviseurs k (inférieurs à 63) de $2013 - \frac{k(k-1)}{2}$** sont **1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 11 ; 22 ; 33 ; 61.**

Grand-mère a donc bien eu de la chance de trouver ma combinaison puisqu'il y avait 8 possibilités :

Avec 1 carte : 2013
Avec 2 cartes : 1006 et 1007
Avec 3 cartes : 670, 671 et 672
Avec 6 cartes : 333, 334, 335, 336, 337 et 338
Avec 11 cartes : 178, 179, … et 188
Avec 22 cartes : 81, 82, 83, … et 102
Avec 33 cartes : 45, 46, … et 77
Avec 61 cartes : 3, 4, 5, … et 63

Olivier Rochoir