<u>Un système pas comme les autres !</u> (Sujet n° 5)

<u>Énoncé :</u>

Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = 4,\ x_2 + \frac{1}{x_3} = 1,\ x_3 + \frac{1}{x_4} = 4,\ \dots ,\ x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 4,\ x_{100} + \frac{1}{x_1} = 1.$$

<u>Solution</u> :

Posons $f(x) = 4 - \frac{1}{x}$ et $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

On a alors $x_1 = f(x_2)$, $x_2 = g(x_3)$, $x_3 = f(x_4)$, $x_4 = g(x_5)$, …, $x_{99} = f(x_{100})$, $x_{100} = g(x_1)$.
En posant $h(x) = f \circ g(x)$, on obtient $x_1 = h(x_3)$, $x_3 = h(x_5)$, …, $x_{97} = h(x_{99})$, $x_{99} = h(x_1)$.
En notant $h^2 = h \circ h$, on a alors $x_1 = h^{50}(x_1)$.

Or $h(x) = f \circ g(x) = \frac{3x-4}{x-1}$. On en déduit que $h^2(x) = \frac{5x-8}{2x-3}$, $h^3(x) = \frac{7x-12}{3x-5}$, …

On peut alors conjecturer que $\mathbf{h^n(x) = \frac{(2n+1)x-4n}{nx+1-2n}}$ **pour** $\mathbf{n \geqslant 1}$**.**

Démontrons ce résultat par récurrence :

La propriété P(n) : « $h^n(x) = \frac{(2n+1)x-4n}{nx+1-2n}$ » est vraie pour n = 1. Puisque $\frac{(2\times1+1)x-4\times1}{1x+1-2\times1} = \frac{3x-4}{x-1}$.

Posons comme hypothèse de récurrence : « Il existe $n \geqslant 1$ tel que $h^n(x) = \frac{(2n+1)x-4n}{nx+1-2n}$ »

On a alors $h^{n+1}(x) = h^n(h(x)) = \frac{(2n+1)h(x)-4n}{nh(x)+1-2n} = \frac{(2n+1)\frac{3x-4}{x-1} - 4n}{n\frac{3x-4}{x-1} + 1 - 2n} = \frac{(2n+1)(3x-4)-4n(x-1)}{n(3x-4)+(1-2n)(x-1)}$

$h^{n+1}(x) = \frac{2nx+3x-4+4n}{nx+x-1-2n} = \frac{(2(n+1))x-4(n+1)}{(n+1)x+1-2(n+1)}$

La propriété P(n) est donc démontrée et $h^n(x) = \frac{(2n+1)x-4n}{nx+1-2n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Ainsi, x_1 est solution de l'équation $h^{50}(x) = x$ c'est-à-dire de $\frac{101x-200}{50x-99} = x$.

Donc x_1 est solution de l'équation du second degré $50x^2 - 200x + 200 = 0$ qui peut se transformer en $(x-2)^2 = 0$. On en déduit qu'il y a une unique solution $x_1 = 2$.
On en déduit que $x_{99} = h(2) = 2$ et, d'équation en équation, que tous les $x_{2n+1} = 2$.

On en déduit ensuite que tous les $x_{2n} = \frac{1}{2}$.

La solution du système est alors : $\mathbf{x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 2,\ x_4 = \frac{1}{2},\ \dots,\ x_{99} = 2,\ x_{100} = \frac{1}{2}.}$

Olivier Rochoir