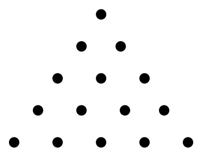
Sommation des inverses des nombres triangulaires 3/10/2011

Précisons d'abord par ce schéma, ce que sont les nombres triangulaires. Ce sont des nombres entiers qui permettent de compter le nombre de points dans la formation triangulaire dessinée ci-dessous :



1er nombre triangulaire : $t(1) = 1$

2e nombre triangulaire : $t(2) = t(1) + 2 = 3$ est le nombre de points du triangle qui en compte 2 à sa base

3e nombre triangulaire : $t(3) = t(2) + 3 = 6$ est le nombre de points du triangle qui en compte 3 à sa base

4e nombre triangulaire : $t(4) = t(3) + 4 = 10$ est le nombre de points du triangle qui en compte 4 à sa base

5e nombre triangulaire : $t(5) = t(4) + 5 = 15$ est le nombre de points du triangle qui en compte 5 à sa base

En fait $t(i)$ est la somme des i premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et premier terme 1 : $t(i) = \dfrac{i(i+1)}{2}$. On dit aussi que 5 est la racine triangulaire de 15. Autre exemple : si on cherche à évaluer la racine triangulaire de 2 023 066, ont doit résoudre l'équation : $\dfrac{x(x+1)}{2} = 2\,023\,066 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 4\,046\,132 = 0$

Son discriminant est : $1 + 4 \times 4\,046\,132 = 4023^2$, les solutions de l'équation sont donc : $x_1 = \dfrac{-1-4023}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+4023}{2}$. La racine triangulaire de 2 023 066 est donc la seule solution positive : $x_2 = 2011$.

On veut ensuite calculer explicitement les sommes : $\mathrm{S}(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t(i)}$, puis évaluer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{2011} \frac{1}{\mathrm{S}(n)}$.

On montre par récurrence que : $\mathrm{S}(n) = \dfrac{2n}{n+1}$.

- $\mathrm{S}(1) = \dfrac{1}{t(1)} = 1 = \dfrac{2 \times 1}{1+1}$ montre que l'égalité à prouver est vraie pour l'entier 1.
- En utilisant $\mathrm{S}(n) = \dfrac{2n}{n+1}$ comme hypothèse, on calcule $\mathrm{S}(n+1) = \mathrm{S}(n) + \dfrac{1}{t(n+1)}$.

  on a donc : $\mathrm{S}(n+1) = \dfrac{2n}{n+1} + \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{2n(n+2)+2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{2(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{2(n+1)}{(n+2)}$

  Ceci est le résultat attendu pour achever la preuve par récurrence de l'égalité : $\mathrm{S}(n) = \dfrac{2n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

  Au passage nous avons ainsi prouvé : $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$.

  La somme que nous cherchons à évaluer est donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{2011} \frac{1}{\mathrm{S}(n)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2011}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(2011 + \sum_{n=1}^{2011}\frac{1}{n}\right)$.

  La dernière somme est la somme partielle de rang 2011 de la série harmonique dont un encadrement bien connu est illustré par comparaison des aires situées sous la branche d'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}; x > 0$, avec la somme des aires de rectangles de largeur 1 et hauteur $\dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}$.

$$\ln(n) < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} < 1 + \ln(n)$$

  On en déduit :

$$\frac{2011 + \ln(2011)}{2} < \sum_{n=1}^{2011} \frac{1}{\mathrm{S}(n)} < \frac{2012 + \ln(2011)}{2}$$

  La partie entière de $\displaystyle\sum_{n=1}^{2011} \frac{1}{\mathrm{S}(n)}$ est donc 1 009.