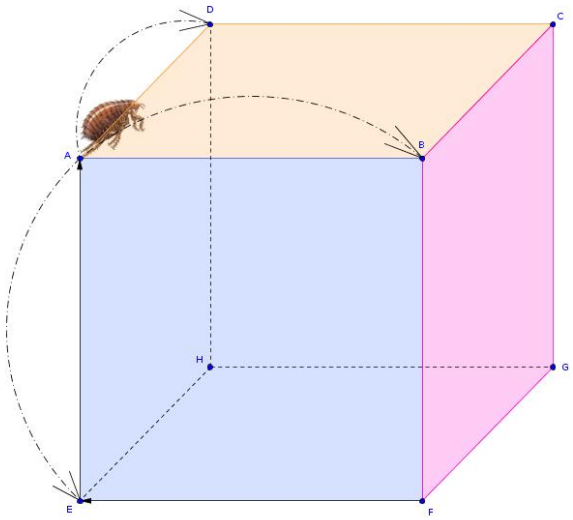
Énoncé du problème

Une puce se déplace aléatoirement sur les arêtes d'un cube ABCDEFGH, d'un sommet à un autre. À chaque station, elle choisit la station suivante parmi les trois sommets adjacents au sommet où elle se trouve. Le choix s'effectue de façon équiprobable et indépendante du trajet déjà effectué. Au départ la puce se trouve au point A.
Déterminer pour $n > 0$, la probabilité p_n pour que le premier retour en A s'effectue à l'issue de la $(2n)^e$ étape

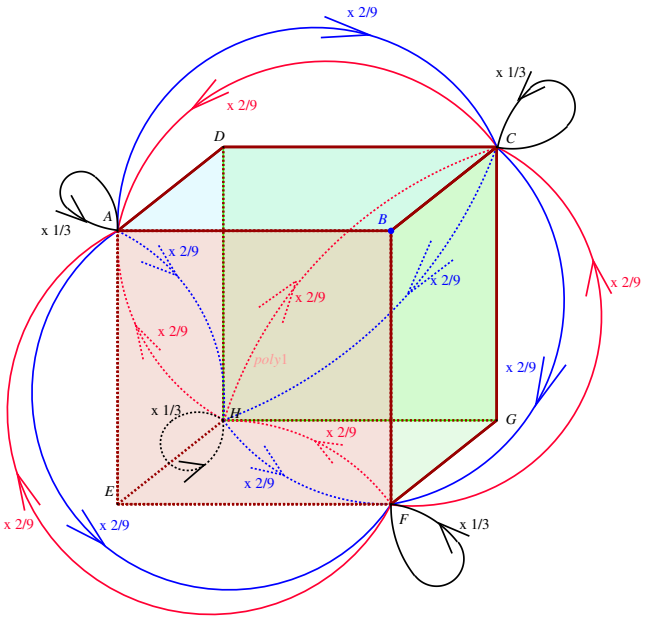


Solution

On suppose que la puce saute indéfiniment, et que le parcours de la puce est désignée par un élément de l'ensemble des suites : $\mathscr{E} = \{A, B, C, D, E, F, G.H\}^{\mathbb{N}^*}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, désignons par X_n le sous ensemble $\{x \in \mathscr{E} / x_n = X\}$. Il s'agit de l'événement : «la puce se trouve au sommet X après n saut(s)», par exemple :

- la puce se trouve en B après 1 saut est l'événement B_1 ; ce sont toutes les suites qui commencent par B ; on a $P(B_1) = \frac{1}{3}$,
- de même $P(D_1) = P(E_1) = \frac{1}{3}$.
- La puce se trouve en A après 2 sauts est l'événement A_2, ce sont toutes les suites dont le 2e terme est A ;
  on a $p_1 = P(A_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) + P(D_1) \times P_{D_1}(A_2) + P(E_1) \times P_{E_1}(A_2) = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.
- La puce se trouve en F après 2 sauts est l'événement F_2,
  on a $P(F_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(F_2) + P(E_1) \times P_{E_1}(F_2) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$,
- de même $P(C_2) = P(H_2) = \frac{2}{9}$.

Partant de A, la puce ne peut revenir en A, qu'après un nombre pair de sauts. Si on ne s'intéresse qu'aux positions de la puce après un nombre pair de sauts, on peut schématiser la situation par le graphe de transition probabiliste ci-contre. Chaque flèche indique la probabilié que la puce se retrouve après 2 sauts, au sommet à l'extrémité de la flèche, sachant qu'elle est partie du sommet à l'origine de la flèche. Pour justifier les pondérations mises sur chaque flèche, il suffit de répéter les calculs des exemples précédents, à partir des sommets C, F ou H. On peut remarquer que B, D, E et G ne peuvent pas être atteint en un nombre pair de sauts. Tout se passe comme si on étudiait les sauts d'une puce entre sommets d'un téraèdre, en décidant qu'elle fait un saut sur place avec une probabilité $\frac{1}{3}$, ou un saut vers un des trois autres sommets de manière équiprobable.



Puisque seul le lieu où se trouve la puce après un nombre pair de sauts nous intéresse, et qu'en plus seul nous importe qu'elle se retrouve en A ou pas, les éventualités de notre expérience aléatoire peuvent être modélisées par des suites, éléments de $\Omega = \{0;1\}^{\mathbb{N}^*}$. Un terme d'indice n égal à 1 signifiera que la puce est revenue en A après $2n$ sauts, si ce terme est 0, cela signifiera que la puce est en C, F ou H. On a expliqué auparavant comment on a attribué la probabilité $\frac{1}{3}$ au sous ensemble des suites commençant par 1 : $p_1 = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega / \omega(1) = 1\}) = \frac{1}{3}$.

La probabilité p_n pour $n > 1$, que nous cherchons à déterminer est la mesure du sous ensemble : $\{\omega \in \Omega / \omega(n) = 1 \text{ et } (\forall i \in [\![1;n-1]\!],\ \omega(i) = 0)\}$. Ce sont toutes les suites du type : $\omega = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{\text{n-1 termes nuls}},1,\ldots)$

- La probabilité que le premier terme soit 0 est $1 - p_1 = \frac{2}{3}$
- Sachant $\omega(1) = 0$, la probabilité que $\omega(2)$ soit nul est $\frac{7}{9}$, car cela signifie que la puce n'est pas revenue en A à partir de C, F ou H.

  $\vdots$
- Sachant que les termes précédents sont nuls, la probabilité que chaque terme de rang $i \in [\![2;n-1]\!]$ soit nul, est toujours $\frac{7}{9}$. C'est la probabilité de ne pas revenir en A, tant que la puce reste toujours en C, F ou H.

  $\vdots$
- La probabilité que le terme de rang n soit 1, sachant son terme précédent nul est $\frac{2}{9}$. C'est La probabilité de revenir en A au (2n)^{e} saut à partir de C , F ou H.

On peut donc effectuer le calcul de p_n pour $n > 1$:

$$p_n = \frac{2}{3} \times \frac{7^{n-2}}{9^{n-2}} \times \frac{2}{9} = \boxed{\frac{4 \times 7^{n-2}}{3^{2n-1}}}$$

On peut remarquer une somme de probabilités fort heureusement égale à 1 :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\sum_{n \in \mathbb{N}\ ;n \geqslant 2} \frac{7^{n-2}}{9^{n-2}}\right)\frac{2}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{1-\frac{7}{9}} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} \times \frac{9}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$