Problème de la quinzaine n°18 : minoration de $\sum_{1\leq i<j\leq n} \cos^2(x_i - x_j)$ 30/05/2012

Énoncé du problème

Montrer que quels que soient les réels $x_1, x_2, \ldots x_n$ on a : $\sum_{1\leq i<j\leq n} \cos^2(x_i - x_j) \geqslant \frac{n(n-2)}{4}$

Solution

Pour minorer la somme $\sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} \cos^2\left(x_p - x_q\right)$, il est plus judicieux d'effectuer la sommation $\sum_{(p,q)\in[\![1;n]\!]^2} \cos^2\left(x_p - x_q\right)$, indicée sur les couples plutôt que sur les paires [1]. Cela introduit des termes supplémentaires :

- il s'agit de termes de la forme $\cos(y_p - y_q) = \cos(y_q - y_p)$ obtenus avec les couples $(p;q)$ et $(q;p)$ pour $p \neq q$,
- il y a aussi n autres termes égaux à 1 obtenus pour les couples de la forme $(p;p)$.

$$\text{On a donc : } \sum_{\{p;q\}\subset[\![1;n]\!]} \cos^2\left(x_p - x_q\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{(p,q)\in[\![1;n]\!]^2} \cos^2\left(x_p - x_q\right) - n\right)$$

En utilisant la formule d'Euler $\cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2}{4}$, on obtient :

$$\sum_{\{p;q\}\subset[\![1;n]\!]} \cos^2\left(x_p - x_q\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sum_{(p,q)\in[\![1;n]\!]^2} e^{2i(x_p-x_q)} + \frac{1}{4}\sum_{(p,q)\in[\![1;n]\!]^2} e^{2i(-x_p+x_q)} + \frac{1}{2}n^2 - n\right)$$

Les sommes qui figurent dans le 2e membre sont identiques à une transposition près des variables muettes p et q, on en déduit :

$$\sum_{\{p;q\}\subset[\![1;n]\!]} \cos^2\left(x_p - x_q\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{(p,q)\in[\![1;n]\!]^2} e^{2ix_p}\, e^{-2ix_q} + \frac{n(n-2)}{2}\right)$$

$$\sum_{\{p;q\}\subset[\![1;n]\!]} \cos^2\left(x_p - x_q\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{p\in[\![1;n]\!]} e^{2ix_p} \times \overline{\sum_{q\in[\![1;n]\!]} e^{2ix_q}} + \frac{n(n-2)}{2}\right)$$

$$\sum_{\{p;q\}\subset[\![1;n]\!]} \cos^2\left(x_p - x_q\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left|\sum_{p\in[\![1;n]\!]} e^{2ix_p}\right|^2 + \frac{n(n-2)}{2}\right)$$

Le carré de la somme figurant dans le deuxième membre étant évidemment positif ou nul on en déduit :

$$\boxed{\sum_{\{p;q\}\subset[\![1;n]\!]} \cos^2\left(x_p - x_q\right) \geqslant \frac{n(n-2)}{4}\,; \qquad \text{pour tout } (x_p)_{p\in[\![1;n]\!]}}$$

Remarquons que l'on a la meilleure minoration possible, puisque la somme évoquée ci-dessus peut être nulle. C'est le cas par exemple si les $(x_p)_{p\in[\![1;n]\!]}$ sont la moitié des arguments des n racines n^e distinctes de l'unité. En particulier :

- avec $\left(x_p = \frac{p\pi}{3}\right)_{p\in[\![1;3]\!]}$; $\sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} \cos^2\left(x_p - x_q\right) = 3\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$
- avec $\left(x_p = \frac{p\pi}{4}\right)_{p\in[\![1;4]\!]}$; $\sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} \cos^2\left(x_p - x_q\right) = 4\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2$

Remarquons que l'on peut en déduire aussi la majoration $\sum_{\{p;q\}\subset[\![1;n]\!]} \sin^2\left(x_p - x_q\right) \leqslant \frac{n^2}{4}$, qui peut devenir égalité dans les mêmes cas que ceux mentionnés ci-dessus.

1. La notation $[\![1;n]\!]$ désignera l'intervalle ne contenant que des entiers : $[1;n]\cap\mathbb{Z}$.
Dans nos sommations, $\{p;q\}$ désigne une véritable paire telle $p \neq q$.