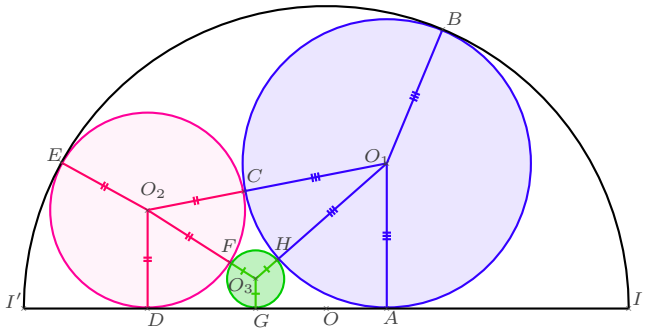
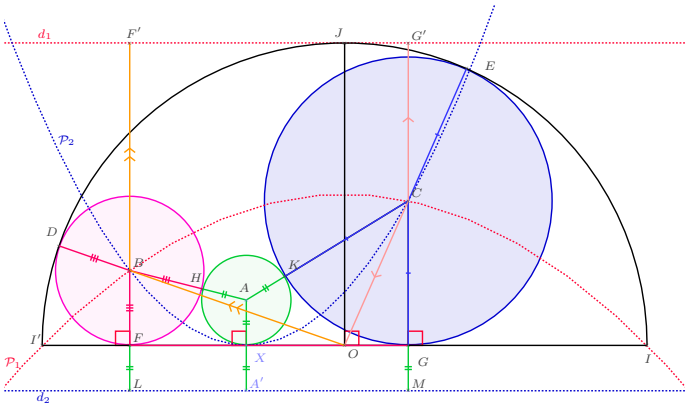
## 1 Énoncé du problème :

Déterminer la borne supérieure du rayon du plus petit cercle de ce sangaku, constitué de 3 cercles inscrits dans ce demi-disque de rayon r=4, admettant [I′I] pour diamètre.




## 2 Solution du problème :




Nommons $\mathscr{C}_0$ le demi cercle de diamètre [II′], nous proposons de construire ce sangaku en partant d'un cercle $\mathscr{C}_3$ quelconque, (en vert sur cette figure), tangent au diamètre [II′]. Dans le repère orthonormé direct d'origine O, où I et J ont respectivement pour coordonées (4;0) et (0;4), le centre A de $\mathscr{C}_3$ a pour coordonnées (X, R) où R est le rayon du cercle.

Nous pourrons alors construire de manière unique les cercles $\mathscr{C}_1$ de centre B et $\mathscr{C}_2$ de centre C, en rouge et bleu sur cette figure, qui auront tous les deux la propriété d'être tangents à $\mathscr{C}_3$ et au diamètre de $\mathscr{C}_0$. Nous chercherons alors la valeur qui s'imposera à R en fonction de X pour que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ soient eux mêmes tangents.

- Pour que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ soient tangents à $\mathscr{C}_0$ et (II′), il faut que leurs centres soient sur la parabole $\mathscr{P}_1$ de foyer O et directrice $d_1$ d'équation $y = 4$, car nous devons avoir $\mathrm{BF}' = \mathrm{BO} = 4 - \mathrm{BF} = 4 - \mathrm{BD}$ et $\mathrm{CG}' = \mathrm{CO} = 4 - \mathrm{CE} = 4 - \mathrm{CG}$.

  Cette parabole $\mathscr{P}_1$ admet pour équation $y = f(x)$ où l'on a posé $\boxed{f(x) = 2 - \frac{1}{8}x^2}$

- Pour que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ soient tangents à $\mathscr{C}_3$ et (II′), il faut que leurs centres soient sur la parabole $\mathscr{P}_2$ de foyer A et directrice $d_2$ d'équation $y = -\mathrm{R}$, car nous devons avoir : $\mathrm{BL} = \mathrm{BA}$ et $\mathrm{CM} = \mathrm{CA}$.

  Cette parabole $\mathscr{P}_2$ de paramètre $p = \mathrm{AA}' = 2\mathrm{R}$ admet pour équation $y = g(x)$ ou l'on a posé $\boxed{g(x) = \frac{(x - \mathrm{X})^2}{4\mathrm{R}}}$

Les centres B et C ont donc des abscisses qui sont les deux solutions $x_1$ et $x_2$ de l'équation du second degré $f(x) = g(x)$. Nous pouvons écrire cette équation en l'inconnue $x$ sous la forme standard :

$$(2 + \mathrm{R})x^2 - 4\mathrm{X}x + 2\mathrm{X}^2 - 16\mathrm{R} = 0 \qquad (1)$$

Pour que les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ soient tangents comme dans la première figure illustrant l'énoncé, il faut que la somme des rayons de ces cercles soit égale à la distance AB. Or le rayon de $\mathscr{C}_1$ est $y_1 = f(x_1)$ et le rayon de $\mathscr{C}_2$ est $y_2 = f(x_2)$. On en déduit que le sangaku est constructible si et seulemnt si X et R sont liés par l'équation :

$$\mathrm{AB}^2 = (y_1 + y_2)^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4y_1y_2$$

$$\text{Or : } 4y_1y_2 = 4f(x_1)f(x_2) = 4\left(2 - \frac{1}{8}x_1^2\right)\left(2 - \frac{1}{8}x_2^2\right)$$

$$\text{Donc : } (x_1 - x_2)^2 = 16 - x_1^2 - x_2^2 + \frac{(x_1x_2)^2}{16}$$

$$\text{Donc : } x_1^2+x_2^2-x_1x_2-\frac{(x_1x_2)^2}{32}-8=0$$

Si nous revenons à l'équation (1) dont $x_1$ et $x_2$ sont les racines, la somme de ces racines est : $\dfrac{4X}{2+R}$. et leur produit est $\dfrac{2X^2-16R}{2+R}$.
Ce qui nous permet d'écrire l'équation qui lie X et R sous la forme suivante :

$$(x_1+x_2)^2-3x_1x_2-\frac{(x_1x_2)^2}{32}-8=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{16X^2}{(2+R)^2}-\frac{3(2X^2-16R)}{2+R}-\frac{(2X^2-16R)^2}{32(2+R)^2}-8=0$$

En multipliant les deux membres par $\dfrac{(2+R)^2}{8}$ on obtient successivement :

$$2X^2-6(2+R)\left(\frac{X^2}{8}-R\right)-\left(\frac{X^2}{8}-R\right)^2-(R+2)^2=0$$

$$2X^2-\frac{3}{2}X^2+12R-\frac{3}{4}RX^2+6R^2-\frac{X^4}{64}+\frac{X^2}{4}R-R^2-R^2-4R-4=0$$

$$4R^2+\left(8-\frac{1}{2}X^2\right)R-\frac{X^4}{64}+\frac{1}{2}X^2-4=0$$

Ce qui, après division par 4, est équivalent à :

$$R^2+2\left(1-\frac{X^2}{16}\right)R-\left(1-\frac{X^2}{16}\right)^2=0$$

Le discriminant réduit de cette équation en R est :

$$2\left(1-\frac{X^2}{16}\right)^2$$

Pour $X\in[-4;4]$, nous avons une seule racine positive :

$$R=(-1+\sqrt{2})\left(1-\frac{X^2}{16}\right)$$

Le maximum de la fonction $\begin{array}{rccc} F: & [-4;4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & X & \longmapsto & (-1+\sqrt{2})\left(1-\dfrac{X^2}{16}\right)\end{array}$ est obtenue pour $X=0$.

$$\boxed{\text{Le rayon maximum pour le plus petit cercle est donc } \sqrt{2}-1}$$

La figure ci-dessous permet d'illustrer la construction du sangaku, elle est accessible sous geogebra à l'URL : http ://lyc-marguerite-valois-math.fr/pb15/sangaku.html pour permette de déplacer le point A à volonté sur la parabole $\mathscr{P}_3$.