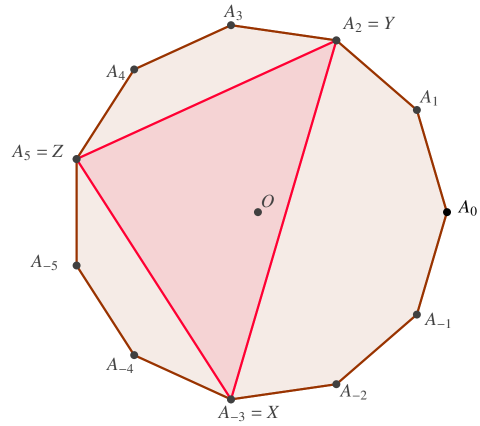
1 Énoncé du problème :

On considère un polygone régulier à 2n+1 sommets. On choisit au hasard 3 sommets distincts du polygone. En supposant l'équiprobabilité dans le choix des sommets, déterminer la probabilité pour que le centre du polygone soit à l'intérieur du triangle formé par ces trois points.

2 Solution du problème :



Nous numéroterons les sommets avec des indices entiers de $-n$ à n, comme dans la figure ci-contre, dans un ordre respectant le sens positif conventionnel. Un triangle XYZ admettant ses trois sommets parmi les $2n+1$ points A_i, sera désigné de manière que $\mathrm{X} = \mathrm{A}_p$, $\mathrm{Y} = \mathrm{A}_q$ et $\mathrm{Z} = \mathrm{A}_r$, avec :

$$\boxed{-n \leqslant p < q < r \leqslant n}.$$

Notre figure illustre le cas : $-n = -5 \leqslant p = -3 < q = 2 < r = 5 \leqslant n = 5$.

On peut construire $\mathrm{C}^3_{2n+1} = \dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$ triangles XYZ différents.

Pour calculer la probabilité demandée, nous devons dénombrer les triangles tels que O soit à l'intérieur, comme dans cette figure. Pourc cela, une observation géométrique montre, que les trois angles du triangle doivent être aigus. Cette affirmation peut être prouvée plus rigoureusement à l'aide de coordonnées barycentriques. Le centre O du cercle circonscrit à XYZ est barycentre de $(\mathrm{X}; \sin 2\widehat{\mathrm{X}})$, $(\mathrm{Y}; \sin 2\widehat{\mathrm{Y}})$ et $(\mathrm{Z}; \sin 2\widehat{\mathrm{Z}})$ [1]. Pour que O soit à l'intérieur du triangle, il faut que les coordonnées barycentriques soient de même signe. Il faut donc que $2\widehat{\mathrm{X}} \in]0;\pi[$, $2\widehat{\mathrm{Y}} \in]0;\pi[$ et $2\widehat{\mathrm{Z}} \in]0;\pi[$, ce qui confirme que $\widehat{\mathrm{X}}$, $\widehat{\mathrm{Y}}$ et $\widehat{\mathrm{Z}}$ doivent exprimer des mesures d'angles aigus [2].

Si nous convenons que $[\overrightarrow{\mathrm{OY}}, \overrightarrow{\mathrm{OZ}}]$ exprime une mesure dans l'intervalle $[0; 2\pi[$, le théorème de l'angle inscrit permet d'écrire : $\widehat{\mathrm{YXZ}} = \dfrac{1}{2}[\overrightarrow{\mathrm{OY}}, \overrightarrow{\mathrm{OZ}}] = \dfrac{1}{2}(r-q)\dfrac{2\pi}{2n+1} = \dfrac{(r-q)\pi}{2n+1}$. Pour que cet angle soit aigu, on doit donc avoir : $\dfrac{(r-q)\pi}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad r - q < n + \dfrac{1}{2}$. En retenant que n , r et q sont entiers, cette condition est équivalente à :

$$\boxed{r - q \leqslant n}$$

De même, pour que $\widehat{\mathrm{XZY}}$ soit aigu on doit avoir :

$$\boxed{q - p \leqslant n}$$

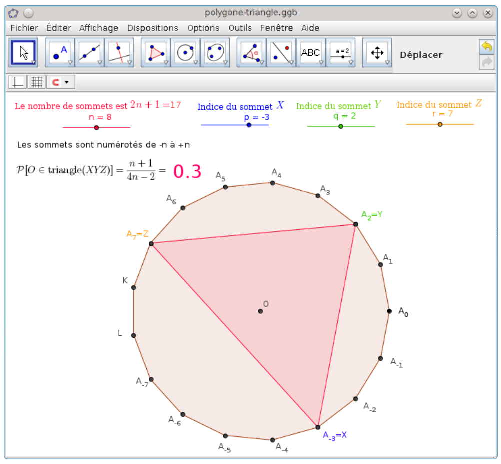
On a : $\widehat{\mathrm{ZYX}} = \dfrac{1}{2}[\overrightarrow{\mathrm{OZ}}, \overrightarrow{\mathrm{OX}}] = \dfrac{1}{2}\left[(p-r)\dfrac{2\pi}{2n+1} + 2\pi\right] = (p - r + 2n + 1)\dfrac{\pi}{2n+1}$. Pour que cet angle soit aigu, il faut que : $(p - r + 2n + 1)\dfrac{\pi}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow n + \dfrac{1}{2} < r - p$. En retenant que r et p sont entiers, cette inégalité est équivalente à :

$$\boxed{r - p \geqslant n + 1}$$

Étant donné l'entier $n > 0$, nous devons donc dénombrer tous les triplets d'entiers (p, q, r) tels que :

$$\boxed{\begin{array}{c} -n \leqslant p < q < r \leqslant n \\ r - p \geqslant n + 1 \\ q - p \leqslant n \\ r - p \leqslant n \end{array}}$$

Une figure construite sous geogebra4, qui permet de faire varier, à l'aide de curseurs, les paramètres n, p, q et r, est consultable à l'URL : http ://lyc-marguerite-valois-math.fr/pb15/polygone-triangle.html. Elle permet la construction de tous les cas de figure obéissant à ces contraintes.



1. Y. et R. SORTAIS : la géométrie du triangle , HERMAN (page 119). $\widehat{\mathrm{X}}$ exprime ici la valeur absolue dans $]0;\pi[$ d'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{XY}}, \overrightarrow{\mathrm{XZ}})$
2. le cas litigieux où O serait sur l'un des côtés ne se pose pas avec un polygône ayant un nombre impair de sommets.

L'intervalle $[p\,;\,r]$ doit donc avoir une longueur minimun égale à $n+1$. Dans ce cas là, on a $[p\,;\,r]=[p\,;\,p+n+1]$, p ne peut donc prendre que les n valeurs entières dans l'intervalle $[-n\,;\,-1]$ pour avoir $p+n+1\leqslant n$. Lorsque $[p\,;\,r]$ est de longueur minimum, les n valeurs entières dans l'intervalle $[p+1\,;\,p+n]$ peuvent alors être affectées à q. On obtient donc en tout n^2 cas de figure où l'intervalle $[p\,;\,r]$ est de longueur minimum $n+1$.

Le cas triavial $n=1$ aboutit à un seul cas de figure possible. Si $n\geqslant 2$, on peut augmenter la longueur de $[p\,;\,r]$ de 1, en la faisant passer à $n+2$ pour obtenir l'intervalle $[p\,;\,p+n+2]$. Il faut donc : $p\in[-n\,;\,-2]$, pour avoir $p+n+2\leqslant n$, on ne peut plus alors affecter à p que $n-1$ valeurs entières. Mais il faut aussi que $q\in\,]p\,;\,p+n+2[$ ne soit pas éloigné des bornes de l'intervalle, d'une distance strictement supérieur à n. On ne peut donc affecter à q, que les $n-1$ valeurs entières dans l'intervalle $[p+2\,;\,p+n]$. On obtient donc $(n-1)^2$ cas de figure possibles avec $r-p=n+2$.

On peut continuer ainsi à faire augmenter la longueur de l'intervalle $[p\,;\,r]$ jusqu'à $2n$, nous obtiendrons successivement $(n-2)^2,\ldots,2^2,1^2$ autres cas de figure. Le nombre total de cas de figure distincts est donc : $\sum_{k=1}^{n}k^2$.

La sommation de ces carrés est un résultat classique que nous pouvons retrouver de la manière suivante :

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^3=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3=\sum_{k=0}^{n}(k^3+3k^2+3k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$\text{Donc : }(n+1)^3=\sum_{k=1}^{n+1}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$\text{d'où : }\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}(n+1)[(n+1)^2-\frac{3}{2}n-1]=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$\boxed{\text{La probabilité cherchée est donc : }\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\mathrm{C}_{2n+1}^{3}}=\frac{n+1}{2(2n-1)}}$$