Énoncé du problème

On considère n nombres réels, u_1, u_2 .....u_n $(n \geqslant 2)$ strictement positifs vérifiant l'égalité suivante :

$$\frac{1}{u_1+2012}+\frac{1}{u_2+2012}+\frac{1}{u_3+2012}+\ldots+\frac{1}{u_n+2012}=\frac{1}{2012}$$

Trouver le plus grand entier naturel m tel que :

$$\prod_{k=1}^{n} u_k \geqslant m$$

Solution

Simplifions l'égalité prise pour hypothèse en multipliant ses deux membres par 2012 :

$$\frac{1}{u_1+2012}+\frac{1}{u_2+2012}+\ldots+\frac{1}{u_n+2012}=\frac{1}{2012} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\frac{u_1}{2012}+1}+\frac{1}{\frac{u_2}{2012}+1}+\ldots+\frac{1}{\frac{u_n}{2012}+1}=1$$

Si on pose $x_k=\dfrac{u_k}{2012}$, nous devons donc chercher la borne inférieure du produit $p=\prod_{k=1}^{n} x_k$, sachant $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k+1}=1$. Si nous obtenons une minoration de p par le réel a, nous en déduirons une minoration de $\prod_{k=1}^{n} u_k = 2012^n \prod_{k=1}^{n} x_k$ par $2012^n a$.

Le cas $n=2$ est très vite résolu car si nous avons $\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}=1$, alors le produit x_1x_2 est égal à 1. Par la suite nous supposerons donc $n \geqslant 3$, afin que soient cohérentes les expressions des sommes et produits envisagés. Plutôt que minorer un produit, nous allons chercher à minorer la somme $\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)$, en utilisant les propriétés de convexité du logarithme de la fonction inverse de $f: \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow &]0;1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x} \end{array}$, soit : $\varphi: \begin{array}{ccc}]0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1}{x}-1\right) \end{array}$. Nous avons $\varphi'(x)=\dfrac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}=-(x-x^2)^{-1}$ et $\varphi''(x)=(1-2x)(x-x^2)^{-2}$. Cette dérivée seconde est du même signe que $(1-2x)$, ce qui nous permet d'en déduire que φ est convexe sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ et concave sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$. Si nous ne considérons que des réesls $x_k \geqslant 1$, nous avons $\dfrac{1}{x_k+1} \in \left]0;\dfrac{1}{2}\right]$, ils vérifient donc l'inégalité de convexité : $\varphi\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\dfrac{1}{x_k+1}\right)$, on en déduit les inégalités équivalentes suivantes : $\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k) \quad \Leftrightarrow \quad n\ln(n-1) \leqslant \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)$ qui permettent d'affirmer :

$$\boxed{(n-1)^n \leqslant \prod_{k=1}^{n} x_k}$$

Si nous ne sommes pas dans le cas $x_k \geqslant 1$ pour tout indice k, un seul peut être strictement inférieur à 1, car si nous avions $x_i<1$ et $x_j<1$, avec $i \neq j$, nous aurions : $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k+1} > \dfrac{1}{x_i+1}+\dfrac{1}{x_j+1} > 1$. Nous raisonnerons sans restriction de généralité en supposant $0<x_1<1$ et $x_k \geqslant 1$ pour tout indice $k \geqslant 2$. Nous utilisons alors la convexité de φ sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ avec seulement les $(n-1)$ derniers x_k, de la manière suivante :

$$\varphi\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_k+1}\right) \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{1}{x_k+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)\varphi\left[\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{1+x_1}\right)\right] \leqslant \ln\left(\prod_{k=2}^{n} x_k\right)$$

Or : $(n-1)\varphi\left(\dfrac{x_1}{(n-1)(x_1+1)}\right)=(n-1)\ln\left(\dfrac{(n-1)(x_1+1)-x_1}{x_1}\right)=\ln\left(\dfrac{(n-2)x_1+n-1}{x_1}\right)^{n-1}$.

On en déduit les inégalités équivalentes suivantes : $\dfrac{[(n-2)x_1+n-1]^{n-1}}{x_1^{n-1}} \leqslant \prod_{k=2}^{n} x_k \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{[(n-2)x_1+n-1]^{n-1}}{x_1^{n-2}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} x_k$

Si on étudie les variations de $g : \begin{array}{ccc}]0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{[(n-2)x+n-1]^{n-1}}{x^{n-2}} \end{array}$, on voit qu'elle admet un minimum pour $x=1$, car sa fonction dérivée est négative pour tout $x \in]0;1[$. En effet, étant donné que nous avons supposé $n \geqslant 3$, on peut écrire :

$$g'(x) = \frac{(n-1)(n-2)[(n-2)x+n-1]^{n-2}x^{n-2} - (n-2)x^{n-3}[(n-2)x+n-1]^{n-1}}{x^{2n-4}}$$

$$g'(x) = (n-2)x^{1-n}[(n-2)x+n-1]^{n-2}[(n-1)x-(n-2)x-n+1]$$

Cette dérivée est donc de même signe que $(x-n+1)$, c'est à dire négatif pour $x \in]0;1[$. La plus petite valeur possible du produit $\prod_{k=1}^{n} x_k$, ne pourrait donc être obtenue qu'avec tous les x_k dans $[1;+\infty[$, avec éventuellemnt un seul d'entre eux égal à 1. L'inégalité de convexité, prouvée plus haut est donc encore applicable, puisque $\dfrac{1}{x_k+1} \in \left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ pour tout k.

$$\boxed{(n-1)^n \leqslant \prod_{k=1}^{n} x_k \quad \Leftrightarrow \quad 2012^n(n-1)^n \leqslant \prod_{k=1}^{n} u_k}$$

Au passage cela prouve que : $(n-1)^n \leqslant g(1) = (2n-3)^{n-1}$, pour tout entier $n > 0$. La borne inférieure du produit $\prod_{k=1}^{n} u_k$ est donc bien un nombre entier égal à $\boxed{2012^n(n-1)^n}$, puisque le minorant que nous avons trouvé est atteint lorsque $u_k = 2012(n-1)$ pour tous les indices k.