Énoncé du problème

Minoration de $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha,\beta,\gamma) & \longmapsto & \left(1+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right) \end{array}$ sur le plan d'équation $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

Solution

Considérons la fonction convexe $f : \begin{array}{ccc}]0\,;2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(1+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right) \end{array}$. Il s'agit bien d'une fonction convexe car sa dérivée première et sa dérivée seconde sont :

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}} \quad ; \quad f''(x)=\frac{\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

Pour $x\in\,]0\,;2\pi[$, nous avons $\sin\frac{x}{2}$ positif qui permet d'affirmer que f'' est positive sur l'intervalle $]0\,;2\pi[$.

$$\text{Pour tout } (\alpha,\beta,\gamma)\in\,]0\,;2\pi[^3 \text{ on a donc : } \qquad f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)\leqslant\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}$$

Dans l'hypothèse où $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, on obtient $f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)=\ln 3$, on en déduit :

$$3\ln 3\leqslant f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)$$

En prenant les exponentielles, on obtient :

$$27\leqslant\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right)$$

La convexité de la fonction f non affine permet d'affirmer que cette inégalité est stricte en dehors du cas d'égalité : $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, pour lequel notre produit est bien égal à : $\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)^3=3^3=27$.