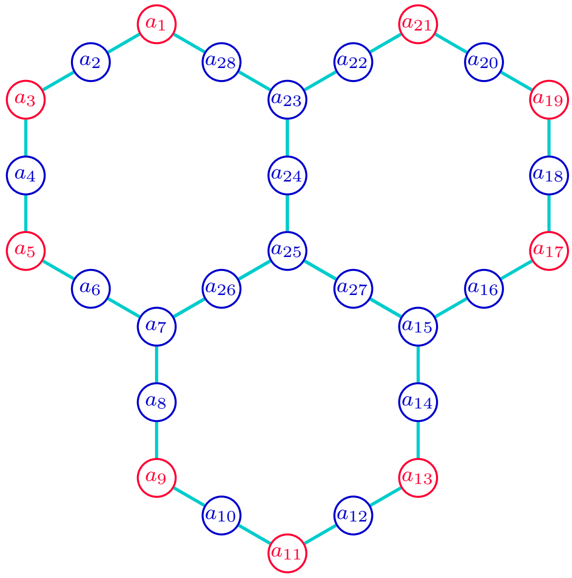
Corrigé du sujet n° 12



J'appelle s la somme des nombres inscrits sur chaque côté de chaque hexagone, puis je traduis les données de l'énoncé de la façon suivante en s'appuyant sur la figure ci-dessus :
$a_1 + a_3 + a_5 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{17} + a_{19} + a_{21} = 100$.
$\sum_{i=1}^{28} a_i + \sum_{i=1}^{12} a_{2i+1} + a_7 + a_{15} + a_{25} + a_{23} = 15s \Leftrightarrow 506 + 2(a_7 + a_{15} + a_{23} + a_{25}) = 15s$.
Cette dernière relation est équivalente à : $15s - 2t = 506$ ave $t = a_7 + a_{15} + a_{23} + a_{25}$.
C'est une équation diophantienne avec une solution particulière : $15 \times 34 - 2 \times 2 = 506$, donc $15(s - 34) = 2(t - 2)$ (E), Donc 15 divise $2(t - 2)$. Or 15 et 2 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 15 divise $(t - 2)$: $t - 2 = 15k, k \in \mathbb{N}$, soit $t = 2 + 15k$.
En remplaçant $t-2$ par $15k$ dans la relation (E), j'obtiens :$2 \times 15k = 15(s-34)$, soit $s = 2k+34$.

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 &= s && (1)\\
a_3 + a_4 + a_5 &= s && (2)\\
a_5 + a_6 + a_7 &= s && (3)\\
a_7 + a_8 + a_9 &= s && (4)\\
a_9 + a_{10} + a_{11} &= s && (5)\\
a_{11} + a_{12} + a_{13} &= s && (6)\\
a_{13} + a_{14} + a_{15} &= s && (7)\\
a_{15} + a_{16} + a_{17} &= s && (8)\\
a_{17} + a_{18} + a_{19} &= s && (9)\\
a_{19} + a_{20} + a_{21} &= s && (10)\\
a_{21} + a_{22} + a_{23} &= s && (11)\\
a_{23} + a_{24} + a_{25} &= s && (12)\\
a_{25} + a_{27} + a_{15} &= s && (13)\\
a_{25} + a_{26} + a_{7} &= s && (14)\\
a_{23} + a_{28} + a_{1} &= s && (15)
\end{aligned}$$

Je remarque que $19 \leqslant t \leqslant 106 \Leftrightarrow 19 \leqslant 15k + 2 \leqslant 106 \Leftrightarrow \dfrac{17}{15} \leqslant k \leqslant \dfrac{104}{15}$, donc $2 \leqslant k \leqslant 6$.
Il faut traiter tous les cas pour aboutir à la seule solution $s = 44$, puis en combinant les relations précédentes , j'arrive à l'unique solution proposée ci-dessous à des rotations et symétries axiales près.