Corrigé du sujet n^{o} 11

Le sujet n°11 vient des olympiades espagnoles. Je le trouve très intéressant pour les raisons suivantes :

1. Pour le résoudre, on peut utiliser :

   a. La géométrie pure

   b. La géométrie analytique

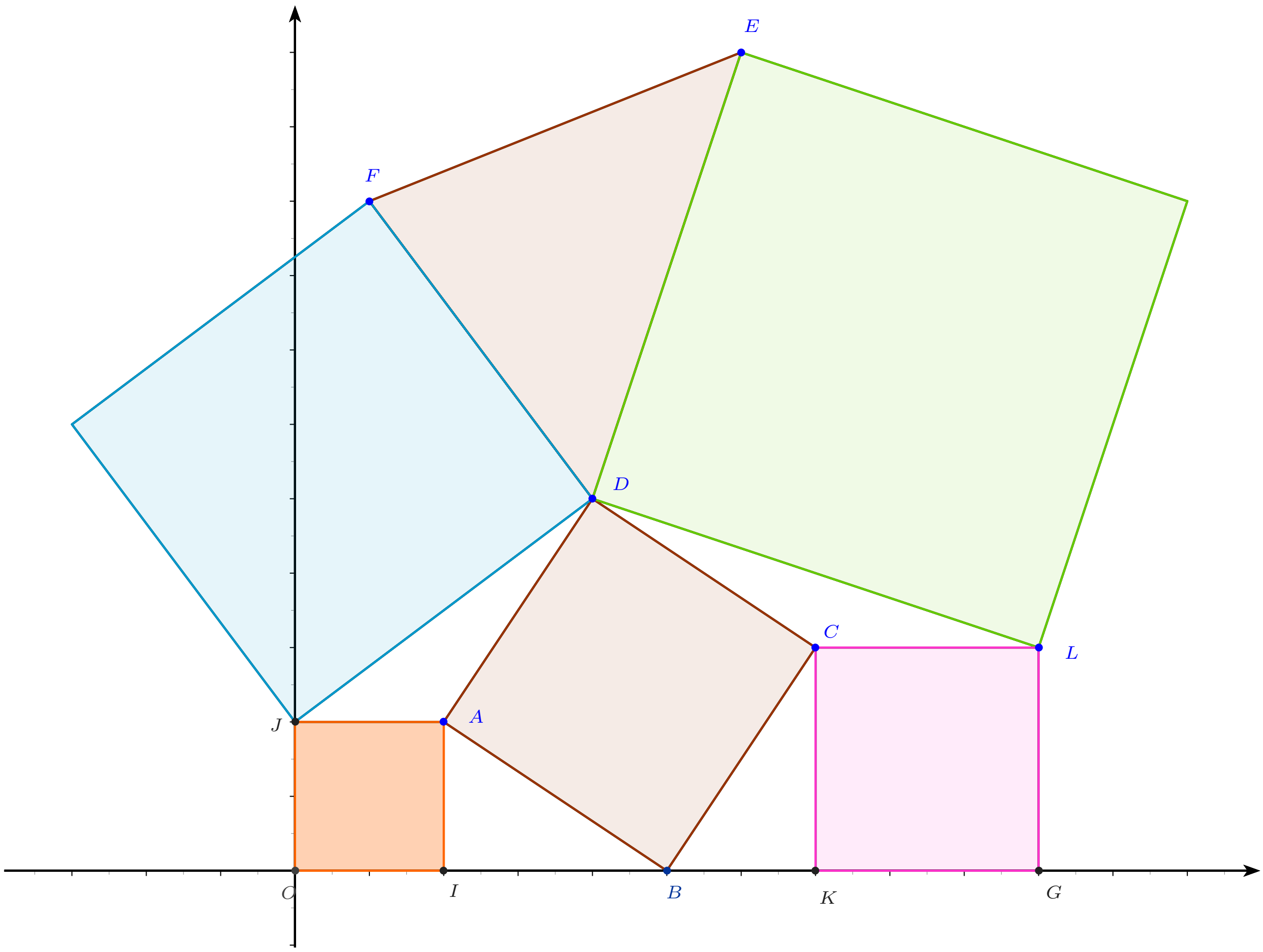
   c. Les nombres complexes

2. On peut aussi le proposer comme construction en seconde avec geogebra et demander aux élèves de vérifier l'égalité des deux aires.

Les triangles IAB et BKC sont isométriques, donc $IA = BK$, $IB = KC$ et $AB = BC$, ce qui nous permet d'affirmer que le point B est le milieu du segment $[OG]$.
On se place dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$. On appelle $z_I = \alpha$ et $z_B = \beta$ avec $\beta > \alpha > 0$, les affixes des points I, et B, et on note $z_O = 0$, $z_J = \alpha i$, $z_A = \alpha(1 + i)$, z_D, $z_L = 2\beta + (\beta - \alpha)$, z_E, et z_F les affixes des points respectivement O, J, A, D, L, E, et F. Il me reste à calculer les affixes des points D, E, et F.
Le point D est l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, donc $z_D = 2\alpha + \beta i$.
Le point E est l'image du point L par la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, donc $z_E = 3\alpha + (3\beta - 2\alpha)i$.
Le point F est l'image du point J par la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, donc $z_F = 3\alpha - \beta + (\beta + 2\alpha)i$.
L'aire du carré $ABCD$ est $AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |\beta - \alpha - \alpha i|^2 = (\beta - \alpha)^2 + \alpha^2$.
Pour calculer l'aire du triangle EFD, je vais utiliser la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(EFD) &= \frac{1}{4}|(z_E - z_D)(\overline{z_F} - \overline{z_D}) - (\overline{z_E} - \overline{z_D})(z_F - z_D)| \\
&= \frac{1}{2}|Im[(z_E - z_D)(\overline{z_F} - \overline{z_D})]| \\
&= \frac{1}{2}|Im[(\alpha + (2\beta - 2\alpha)i)(\alpha - \beta - 2\alpha i)]| \\
&= \alpha^2 + (\beta - \alpha)^2
\end{aligned}$$

Donc le triangle EFD et le carré $ABCD$ ont la même aire.


E
F
D
C
L
J
A
O
I
B
K
G