Corrigé du sujet n° 6

Pour montrer l'inégalité demandée, j'utilise les deux résultats suivants en démontrant le deuxième, car le premier est évident !

1. $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$ pour x, y, z positifs

2. $\sin\frac{\alpha}{2} \times \sin\frac{\beta}{2} \times \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$

Je montre le deuxième résultat :

$$\begin{aligned} 2\sin\tfrac{\alpha}{2} \times \sin\tfrac{\beta}{2} \times \sin\tfrac{\gamma}{2} &= [\cos(\tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\beta}{2}) - \cos(\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2})]\sin\tfrac{\gamma}{2} \\ &= (\cos(\tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\beta}{2}) - \sin\tfrac{\gamma}{2})\sin\tfrac{\gamma}{2} \\ &= \cos(\tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\beta}{2})\sin\tfrac{\gamma}{2} - \sin^2\tfrac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

Donc $2\sin\frac{\alpha}{2} \times \sin\frac{\beta}{2} \times \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \sin\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}$ car $\cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) \leqslant 1$.
Or $\sin\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - \sin\frac{\gamma}{2})^2 \leqslant \frac{1}{4}$ (on peut aussi étudier la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0;1]$). D'où la deuxième inégalité. Avec égalité si $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$
En utilisant la première inégalité, j'obtiens :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} &= 1 + \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \geqslant 3\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} \\ 1 + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} &= 1 + \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} \geqslant 3\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{2}}} \\ 1 + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} &= 1 + \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geqslant 3\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}} \end{aligned}$$

Donc
$(1 + \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}})(1 + \dfrac{1}{\sin\frac{\beta}{2}})(1 + \dfrac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}) \geqslant 27(\sqrt[3]{((\frac{1}{4})^3)(8)^2})$, d'où l'inégalité demandée. Il y a égalité si, et seulement si, le triangle est équilatéral.