Corrigé du sujet n° 6

$$\begin{aligned}
\frac{sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma}{cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma} = 2 &\Leftrightarrow sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma = 2(cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma) \\
&\Leftrightarrow 1 - cos^2\alpha + 1 - cos^2\beta + 1 - cos^2\gamma = 2cos^2\alpha + 2cos^2\beta + 2cos^2\gamma \\
&\Leftrightarrow cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1 + cos2\alpha}{2} + \frac{1 + cos2\beta}{2} + cos^2\gamma = 1 \\
&\Leftrightarrow cos2\alpha + cos2\beta + 2cos^2\gamma = 0 \\
&\Leftrightarrow 2cos(\alpha + \beta)cos(\alpha - \beta) + 2cos^2\gamma = 0 \\
&\Leftrightarrow -cos\gamma cos(\alpha - \beta) + cos^2\gamma = 0 \\
&\Leftrightarrow cos\gamma(cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)) = 0 \\
&\Leftrightarrow cos\alpha cos\beta cos\gamma = 0 \\
&\Leftrightarrow cos\alpha = 0 \text{ ou } cos\beta = 0 \text{ ou } cos\gamma = 0.
\end{aligned}$$

ABC est un triangle rectangle si et seulement si les mesures de ses angles vérifient la relation proposée.