Corrigé du sujet n° 5

J'utilise l'inégalité suivante : $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ (E) valable dans $\mathbb{R}$, en particulier dans $\mathbb{R}_+^*$, pour obtenir les inégalité suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{x_2} & \geqslant 2\sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}} \\ x_2 + \dfrac{1}{x_3} & \geqslant 2\sqrt{\dfrac{x_2}{x_3}} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ x_{99} + \dfrac{1}{x_{100}} & \geqslant 2\sqrt{\dfrac{x_{99}}{x_{100}}} \\ x_{100} + \dfrac{1}{x_1} & \geqslant 2\sqrt{\dfrac{x_{100}}{x_1}} \end{cases}$$

En multipliant membre à membre les inégalités précédentes, j'obtiens :
$(x_1 + \dfrac{1}{x_2})(x_2 + \dfrac{1}{x_3}) \dots (x_{99} + \dfrac{1}{x_{100}})(x_{100} + \dfrac{1}{x_1}) \geqslant 2^{100} \quad (E_1)$.
Or $(x_1 + \dfrac{1}{x_2})(x_2 + \dfrac{1}{x_3}) \dots (x_{99} + \dfrac{1}{x_{100}})(x_{100} + \dfrac{1}{x_1}) = 4^{50} = 2^{100}$.
J'ai une égalité dans l'inégalité (E_1), donc les inégalités précédentes sont en fait des égalités, c'est-à-dire :
$x_1 + \dfrac{1}{x_2} = 2\sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}},\ x_2 + \dfrac{1}{x_3} = 2\sqrt{\dfrac{x_2}{x_3}}, \dots, x_{100} + \dfrac{1}{x_1} = 2\sqrt{\dfrac{x_{100}}{x_1}}$.
Comme par ailleurs, si j'ai une égalité dans l'inégalité (E) celle-ci équivaut à $x = y$, d'où les égalités suivantes :
$x_1 = \dfrac{1}{x_2},\ x_2 = \dfrac{1}{x_3},\ \cdots, x_{99} = \dfrac{1}{x_{100}},\ x_{100} = \dfrac{1}{x_1}$. Ce qui conduit à la solution suivante :
$x_1 = 2,\ x_2 = \dfrac{1}{2},\ x_3 = 2,\ \dots,\ x_{99} = 2,\ x_{100} = \dfrac{1}{2}$