Corrigé du sujet n° 18

J'ai les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos^2(x_i - x_j) &\geqslant \frac{n(n-2)}{4} \\
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2\cos^2(x_i - x_j) &\geqslant \frac{n(n-2)}{2} \\
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\cos 2(x_i - x_j) + 1) &\geqslant \frac{n(n-2)}{2} \\
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos 2(x_i - x_j) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1 &\geqslant \frac{n(n-2)}{2} \\
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos 2(x_i - x_j) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} 1\right) &\geqslant \frac{n(n-2)}{2} \\
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos 2(x_i - x_j) + \frac{n(n-1)}{2} &\geqslant \frac{n(n-2)}{2} \\
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos 2(x_i - x_j) &\geqslant -\frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Répondre à la question posée revient à démontrer cette dernière inégalité.
Or $(\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \cos^2(2x_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos 2x_i \cos 2x_j$,
et $(\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sin^2(2x_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \sin 2x_i \sin 2x_j$.
En additionnat membre à membre les deux égalités précédentes, j'obtiens :
$(\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i)^2 = n + 2(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos 2x_i \cos 2x_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \sin 2x_i \sin 2x_j)$.
Soit $(\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i)^2 = n + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos 2(x_i - x_j)$.
D'où le résultat souhaité.