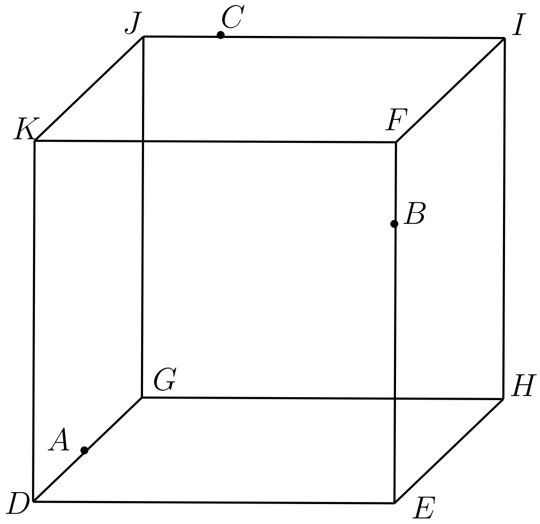
Corrigé du sujet n° 17



Je considère le cube GDEHJKFI d'arête 1, et je me place dans le repère $(D, \overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DG}; \overrightarrow{DK})$. Les coordonnées des points A , B et C sont respectivement $(0, y, 0)$, $(1, 0, z)$ et $(x, 1, 1)$, donc le périmètre du triangle ABC est :

$$P = AB + AC + BC = \sqrt{1 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (1-y)^2 + 1} + \sqrt{(1-x)^2 + 1 + (1-z)^2}.$$

L'inégalité de Minkowski me permet d'écrire :

$$P \geqslant \sqrt{(1+1+1)^2 + (y+1-z+x)^2 + (z+2-x-y)^2}.$$

D'où $P \geqslant \sqrt{9 + (1+x+y-z)^2 + (2-x-y+z)^2}$. Maintenant, je vais chercher à minimiser l'expression suivante $(y+1-z+x)^2 + (z+2-x-y)^2 = [1+x+y-z]^2 + [2-(x+y-z)]^2$. En posant $X = x+y-z$, on est conduit à trouver le minimum d'une fonction du second degré, ce qui donne $[1+x+y-z]^2 + [2-(x+y-z)]^2 \geqslant \dfrac{9}{2}$. Donc $P \geqslant \sqrt{9 + \dfrac{9}{2}}$, c'est-à-dire $P \geqslant \sqrt{\dfrac{27}{2}}$.

Je constate que cette valeur est atteinte pour $x = y = z = \dfrac{1}{2}$, ce qui me permet de dire que le périmètre de ABC est minimal quand les points A , B et C sont confondus avec les milieux des segments $[DG]$, $[EF]$ et $[JI]$