On note $\mathscr{E}_n$ l'évènement considéré. On alors

$$P(\mathscr{E}_n) = \frac{\text{nombre de chemins réalisant } \mathscr{E}_n}{3^{2n}}$$

par équiprobabilité sur l'ensemble des chemins de longueur $2n$.
Il faut observer qu'à un instant $2k$, la puce sera nécessairement en A, C, F ou H. Notons α_k le nombre de chemins de longueur $2k$ qui ne repassent jamais par A.
En remarquant qu'il y a deux façons de rallier le point A à partir de H, F ou C, on a pour tout entier n supérieur ou égal à 2

$$P(\mathscr{E}_n) = \frac{2\alpha_{n-1}}{3^{2n}}.$$

Pour calculer α_n, on peut remarquer que $\alpha_1 = 6$ puis que pour tout k supérieur ou égal à 1, on a $\alpha_{k+1} = 7\alpha_k$.
Ici encore, le facteur 7 se justifie par le fait qu'il existe 7 chemins de longueur 2 permettant d'éviter le point A à partir des points H, F ou C. Ainsi pour tout k supérieur ou égal à 1, $\alpha_k = 6 \cdot 7^{k-1}$ et donc tout n supérieur ou égal à 2

$$p_n = \frac{4}{3 \times 9} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-2}.$$

Remarque : la formule n'est pas valable pour $n = 1$ et on a $p_1 = 1/3$.