

Une solution alternative au problème de la quinzaine numéro 14

On numérote encore les sommets du polygone de 0 à $2n$ dans le sens trigonométrique et on note A_k le sommet correspondant au numéro k .

Si k_1, k_2 et k_3 sont trois entiers tels que $0 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq 2n$, une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle $A_{k_1}A_{k_2}A_{k_3}$ contienne en son intérieur le centre O du polygone est que les angles $\widehat{A_{k_1}OA_{k_2}}$ et $\widehat{A_{k_2}OA_{k_3}}$ soient strictement inférieurs à l'angle plat et que l'angle $\widehat{A_{k_1}OA_{k_3}}$ soit strictement compris entre l'angle plat et l'angle plein. Cela se traduit par

$$\text{un système d'inéquations diophantiennes : } \begin{cases} 0 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq 2n \\ k_2 - k_1 \leq n \\ k_3 - k_2 \leq n \\ n+1 \leq k_3 - k_1 \leq 2n \end{cases}$$

On cherche maintenant à compter le nombre de triplets (k_1, k_2, k_3) solutions de ce système.

Chacun des systèmes : $\begin{cases} 0 \leq k_1 < k_3 \leq 2n \\ k_3 - k_1 = i \end{cases}$ pour i variant de $n+1$ à $2n$ possède $(2n+1-i)$ couples solutions (k_1, k_3) . Pour une valeur de i donnée et pour chacun des couples (k_1, k_3) associés il y a $(2n+1-i)$ valeurs de k_2 qui vérifient le système $\begin{cases} k_2 - k_1 \leq n \\ k_3 - k_2 \leq n \end{cases}$.

Le nombre de solutions du système initial d'inéquations est donc donné par la somme $\sum_{i=n+1}^{2n} (2n+1-i)^2$ qui peut se mettre sous la forme $\sum_{j=1}^n j^2$. On reconnaît la somme des n premiers carrés dont on sait qu'elle peut se factoriser pour donner $\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$. On conclue alors comme précédemment.

On peut remarquer au passage que ces deux approches du dénombrement des triangles contenant le centre du polygone permettent de retrouver la factorisation de la somme des n premiers carrés.