Le problème de la quinzaine.

Problème n°10.
x, y, z sont des nombres entiers tels que $(x + y + z)$ divise $(x^2 + y^2 + z^2)$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels non nuls tels que $(x + y + z)$ divise $(x^n + y^n + z^n)$.

Solution.
Pour n entier naturel non nul, on a l'identité suivante que l'on peut facilement vérifier :

$$x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} = (x + y + z)(x^{n+2} + y^{n+2} + z^{n+2}) - (xy + yz + xz)(x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}) + (x^n + y^n + z^n)xyz$$

On note $A_n = x^n + y^n + z^n$. On a $xy + yz + xz = (A_1^2 - A_2)/2$ et l'identité précédente prend la forme :

$$A_{n+3} = A_1 A_{n+2} - 1/2(A_1^2 - A_2)A_{n+1} + xyzA_n \quad (1)$$

On particularise le problème au cas où x, y et z sont des entiers et on peut maintenant examiner les questions de divisibilité. On suppose d'après l'énoncé que A_1 divise A_2. Le facteur ½ dans la quantité $1/2(A_1^2 - A_2)$ pose problème, aussi il va falloir distinguer deux cas.

- Si A_1 est impair il en est de même de A_2 et alors A_1 divise $1/2(A_1^2 - A_2)$. On a alors d'après (1) que A_1 divise $A_{n+3} - xyzA_n$. On prouve par une récurrence facile que, pour tout entier naturel k, on a d'une part que A_{3k+1} est toujours divisible par A_1, et d'autre part que A_{3k+2} est toujours divisible par A_1 (puisque A_2 est divisible par A_1).
- Si A_1 est pair il en est de même de A_2 et même de A_n. Par conséquent dans l'égalité (1), $A_{n+1}/2$ est un entier et comme A_1 divise $(A_1^2 - A_2)$ alors A_1 divise $1/2(A_1^2 - A_2)A_{n+1}$. On retrouve le fait que A_1 divise $A_{n+3} - xyzA_n$ et on conclut comme précédemment.