

Enoncé

ABC est un triangle dont les longueurs des côtés sont entières et qui vérifient $CA + CB = AB + CH$ où H est le pied de la hauteur issue de C.

Que peuvent valoir les longueurs des côtés du triangle ABC ?

Solution

Soit ABC un triangle vérifiant les conditions de l'énoncé.

On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $h = CH$. On a donc $a + b = c + h$. Tout d'abord on remarque qu'on a nécessairement $a \leq c$ et $b \leq c$, en effet, dans le cas contraire, puisque $h \leq a$ et $h \leq b$, on aurait l'inégalité stricte $c + h < a + b$ qui est contradictoire avec l'égalité initiale. On peut supposer sans perdre en généralité que $a \leq b$.

La formule de Héron donne l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle en fonction des longueurs de ses côtés :

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}{16}}$$

Comme par ailleurs $\mathcal{A} = \frac{ch}{2}$ et $h = a + b - c$, on obtient facilement l'égalité vérifiée par les longueurs a , b

et c : $(a+b+c)(a-b+c)(-a+b+c) = 4(a+b-c)c^2$, ou encore, puisque c n'est pas nul :

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1\right) \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c} + 1\right) \left(-\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1\right) = 4 \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1\right) \quad (1).$$

On pose $X = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ et $Y = \frac{b}{c} - \frac{a}{c}$; comme on a $0 \leq b - a < c$ alors Y varie dans l'intervalle $[0 ; 1[$ et l'égalité (1) devient $(X + 1)(1 - Y^2) = 4(X - 1)$. On peut exprimer X en fonction de Y à partir de cette dernière égalité : $X = \frac{5 - Y^2}{3 + Y^2}$.

Si Y est un rationnel qui appartient à $[0 ; 1[$ alors $Y = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers premiers entre eux et $p < q$, et

$$X = \frac{5q^2 - p^2}{3q^2 + p^2} \text{ d'où } \frac{a}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{5q^2 - p^2}{3q^2 + p^2} - \frac{p}{q} \right) \text{ et } \frac{b}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{5q^2 - p^2}{3q^2 + p^2} + \frac{p}{q} \right).$$

Si on note $a' = 5q^3 - 3q^2p - p^2q - p^3$, $b' = 5q^3 + 3pq^2 - p^2q + p^3$, $c' = 6q^3 + 2p^2q$ et $\alpha = \text{PGCD}(a', b', c')$

alors les solutions du problème sont de la forme $a = k \frac{a'}{\alpha}$, $b = k \frac{b'}{\alpha}$ et $c = k \frac{c'}{\alpha}$ avec k entier naturel non nul.

Il resterait à faire une étude plus fine des valeurs possibles de α en fonction de p et q pour donner une forme plus directe aux expressions de a , b et c .