Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 6

Notons a, b, c les trois angles, en radian, d'un triangle. On a donc $a + b + c = \pi$.
Montrons tout d'abord la relation trigonométrique vérifiée par a, b et c :

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1 \quad (1)$$

En effet on a :

$$\begin{aligned}
2 \cos a \cos b \cos c &= (2\cos a \cos b) \cos c \\
&= [\cos(a + b) + \cos(a - b)] \cos c \\
&= [\cos(\pi - c) + \cos(a - b)] \cos c \\
&= -\cos^2 c + \cos(a - b) \cos(\pi - a - b) \\
&= -\cos^2 c - (\cos a \cos b + \sin a \sin b)(\cos a \cos b - \sin a \sin b) \\
&= -\cos^2 c - \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b \\
&= -\cos^2 c - \cos^2 a (1 - \sin^2 b) + \sin^2 a \sin^2 b \\
&= -\cos^2 c - \cos^2 a + (\cos^2 a + \sin^2 a) \sin^2 b = -\cos^2 c - \cos^2 a + \sin^2 b.
\end{aligned}$$

D'où $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - \cos^2 c - \cos^2 a + \sin^2 b = 1$.

Revenons à l'équation posée.
Les équations (2), (3) et (4) sont équivalentes:
$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c)$ (2)
$3 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c = 2(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c)$ (3)
$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$ (4)
D'après (1) on en déduit que $\cos a \cos b \cos c = 0$ et donc a, b ou c vaut $\pi./2$.
Les seuls triangles qui vérifient l'équation initiale sont rectangles.