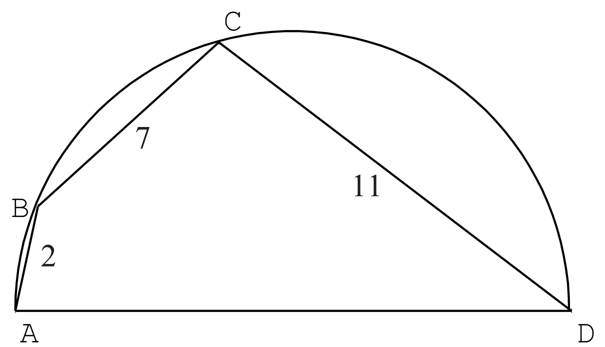
Le problème de la quinzaine numéro 2

Solution

Soit un hexagone H_0, dont deux côtés ont pour longueur 2, deux autres une longueur 7 et les deux derniers une longueur 11. Si H_0 est inscriptible dans un cercle, on peut construire un hexagone H dont les côtés auront pour longueurs consécutives 2-7-11-11-7-2 et qui sera inscriptible dans le même cercle. En effet, les six triangles isocèles, de sommet principal le centre du cercle circonscrit et de bases les côtés de H_0, peuvent être réordonnés autour de ce centre dans l'ordre indiqué et former un nouvel hexagone H inscriptible dans ce cercle.
H admet un axe de symétrie qui est un diamètre de son cercle circonscrit. On peut donc restreindre l'étude à la figure ci-dessous :



On note R le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère ABCD.
Ce quadrilatère vérifie donc la relation de Ptolémée : AB×CD + BC×AD = BD×AC soit ici
$22 + 14R = BD \times AC$
Les triangles ABD et ACD sont rectangles respectivement en B et C : $(2R)^2 = 2^2 + BD^2$ et $(2R)^2 = 11^2 + AC^2$.
De ces trois égalités on tire : $(22 + 14R)^2 = [(2R)^2 - 11^2] \times [(2R)^2 - 2^2]$.
Soit après développement, réduction et simplification : $R^3 - 43{,}5R - 38{,}5 = 0$
Avant de se lancer dans la résolution de cette équation cubique on regarde s'il n'y aurait pas une solution « évidente ». On trouve sans trop de peine que 7 en est une.
On factorise alors $R^3 - 43{,}5R - 38{,}5$ sous la forme $(R - 7)(R^2 + 7R + 5{,}5)$. Les deux solutions de l'équation $R^2 + 7R + 5{,}5 = 0$ sont réelles mais négatives : $-3{,}5 \pm 1{,}5\sqrt{3}$.
En définitive seul 7 est une solution admissible à l'équation cubique.
Le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone vaut donc 7.