Corrigé du problème 6

Un calcul élémentaire prouve que si le triangle est rectangle ie si l'un des angles est égal à $\frac{\pi}{2}$ alors

$$\frac{\sin^2(\alpha)+\sin^2(\beta)+\sin^2(\gamma)}{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)} = 2.$$

Réciproquement supposons cette égalité vérifiée. L'égalité $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ permet, après calculs, de montrer que l'équation

$$\frac{\sin^2(\alpha)+\sin^2(\beta)+\sin^2(\gamma)}{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)} = 2$$

équivaut à $\sin^2(\alpha)+\sin^2(\beta)+\sin^2(\gamma) = 2$.
En utilisant la formule de linéarisation, $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, l'égalité devient

$$1+\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)+\cos(2\gamma) = 0.$$

Les trois angles du triangle vérifie $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ d'où l'on obtient

$$1+\cos(2\alpha)++\cos(2\beta)+\cos(2\alpha+2\beta) = 0.$$

En utilisant la formule $\cos(x)+\cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$, cette dernière équation s'écrit

$$1+\cos(2\alpha)+2\cos(\alpha)\cos(2\beta+\alpha) = 0$$

où α et β sont deux angles positifs vérifiant $0 \le \alpha+\beta \le \pi$. Un de ces deux angles est aigu, on peut donc supposer sans perte de généralité que $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.
On distingue deux cas :

1. Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ alors le triangle est rectangle.
2. Si $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ alors :
   On fixe cet angle α et on étudie la fonction f de β, sur $[0;\pi-\alpha]$, définie par

$$f(\beta) = 1+\cos(2\alpha)+2\cos(\alpha)\cos(2\beta+\alpha).$$

$\cos(\alpha)$ est positif donc cette fonction suit les mêmes variations que la fonction cosinus à savoir :
- f est strictement décroissante sur $I = [0, \frac{\pi-\alpha}{2}]$ avec $f(0) = 2(1+\cos(2\alpha)) \ge 0$ et $f(\frac{\pi-\alpha}{2}) = \cos(\alpha)(\cos(\alpha)-1) \le 0$
- f est strictement croissante sur $I = [\frac{\pi-\alpha}{2}, \pi-\alpha]$ avec $f(\pi-\alpha) = 2(1+\cos(2\alpha)) \ge 0$

Le théorème des valeurs intermédiaires assurent l'existence et l'unicité, sur chacun des intervalles I et J, d'une valeur de β telle que $f(\beta) = 0$. On vérifie aisément, que ces deux valeurs de β qui annulent f, sont respectivement $\beta = \frac{\pi}{2}-\alpha$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$.
Si $\beta = \frac{\pi}{2}$ le triangle est trivialement rectangle. Si $\beta = \frac{\pi}{2}-\alpha$ alors $\gamma = \pi-\alpha-\beta = \frac{\pi}{2}$ et donc le triangle est rectangle également.
Conclusion : l'égalité

$$\frac{\sin^2(\alpha)+\sin^2(\beta)+\sin^2(\gamma)}{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)} = 2$$

est vérifiée ssi le triangle est rectangle.