Corrigé du problème 5

Soient $x_1, ..., x_{100}$ des réels vérifiant le système

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{x_2} = 1 \\ x_2 + \frac{1}{x_3} = 4 \\ \vdots \quad \vdots \\ x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 1 \\ x_{100} + \frac{1}{x_1} = 4 \end{cases}$$

Clairement, les lignes de rangs impairs impliquent que $x_{2i+1} \neq 1$ et celles de rang pairs impliquent que $x_{2i+2} \neq 4$ pour tout $i = 0, ...49$. Donc le système de départ équivaut au système en "cascade" suivant :

$$(\diamond) \begin{cases} x_2 = f(x_1) \\ x_3 = g(x_2) \\ \vdots \quad \vdots \\ x_{100} = f(x_{99}) \\ x_1 = g(x_{100}) \end{cases}$$

où les fonctions f et g sont les homographies suivantes $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et $g(x) = \frac{1}{4-x}$. Pour simplifier les problèmes de domaines de définition, on suppose que les homographies sont des bijections de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On résout le système $(\diamond)$ dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Posons u l'homographie définie par $u = g \circ f$ (la composée de deux homographies est une homographie). Un calcul élémentaire fournit

$$u(x) = \frac{-x+1}{-4x+3}.$$

Ainsi en remontant les équations ci-dessus, on obtient la condition

$$x_1 = u^{50}(x_1)$$

ie x_1 est nécessairement point fixe de l'homographie u^{50} où u^{50} désigne la composée de u par elle-même 50 fois. On rappelle que u est associée à la matrice

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

et que composer des homographies revient à multiplier les matrices associées donc l'homographie u^{50} est associé à la matrice U^{50}. Une trigonalisation de U permet d'écrire $U = PTP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons p et t les homographies associées aux matrices P et T : on a

$$p(x) = \frac{x}{2x+1} \qquad t(x) = x+1 \qquad p^{-1}(x) = \frac{x}{-2x+1},$$

en particulier t est une translation. Ainsi $u = ptp^{-1}$ donc $u^{50} = pt^{50}p^{-1}$ avec $t^{50}(x) = x + 50$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le point x est un point fixe de u^{50} ssi le point $p^{-1}(x)$ est un point fixe de la translation t^{50} donc ssi $p^{-1}(x) = \infty$ (dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une translation de vecteur non nul admet toujours un unique point fixe qui est ∞). On obtient $x = p(\infty) = \frac{1}{2}$. Ainsi u^{50} admet

$\frac{1}{2}$ comme unique point fixe et donc $x_1 = \frac{1}{2}$. On calcule successivement les valeurs des autres x_i.
$x_2 = g(x_1) = g(\frac{1}{2}) = 2$ puis $x_3 = f(x_2) = f(2) = \frac{1}{2}$ etc...on en déduit que nécessairement

$$(x_1, x_2; \ldots, x_{99}, x_{100}) = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2; \ldots, \frac{1}{2}, 2\right).$$

On vérifie que cet vecteur est bien solution du système initial. C'est donc l'unique vecteur solution du problème.