Corrigé du problème 4

On note T le point qui repère Tom et J le point qui repère Jerry. On note O le centre de la pièce, R la rayon de la pièce circulaire, θ l'angle polaire en supposant que le trou de souris a pour coordonnée polaire $[\theta = 0, R]$. On note enfin $\overrightarrow{u_\theta}$ le vecteur unitaire d'angle polaire θ et $\overrightarrow{v_\theta}$ le vecteur unitaire d'angle polaire orthogonal $\theta + \frac{\pi}{2}$. Si f est une fonction on note $\dot{f}$ la dérivée par rapport au temps t et f' la dérivée par rapport à θ.

$$\overrightarrow{0T} = r\overrightarrow{u_\theta} \qquad \overrightarrow{0J} = R\overrightarrow{u_\theta}.$$

Les deux vecteurs vitesse sont : θ.

$$\dot{\overrightarrow{0T}} = \dot{r}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\overrightarrow{v_\theta} \qquad \dot{\overrightarrow{0J}} = R\dot{\theta}\overrightarrow{v_\theta}.$$

Les normes de ces deux vecteurs vitesses sont égaux donc

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = R^2\dot{\theta}^2.$$

On écrit r comme une fonction de θ : $r = \rho(\theta)$. On a par dérivation d'une fonction composée $\dot{r} = \dot{\theta}\rho'$. L'équation différentielle devient :

$$\rho'^2 + \rho^2 = R^2.$$

C'est une équation différentielle à variables séparables. On écrit $\rho' = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}$. On obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \mathrm{d}\theta$$

ce qui par intégration donne

$$\arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right) = \theta + \mathrm{Cte}.$$

Tom part de l'origine du repère à $t = 0$ donc la constante d'intégration est nulle d'où

$$\arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right) = \theta.$$

Tom attrape Jerry si $\rho = R$ c'est-à-dire quand $\theta = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. Jerry se fait donc attrapée après un quart de tour.

Remarque : Ecrire r, qui est une fonction du temps t, comme une fonction de θ ($r = \rho(\theta)$) suppose en fait que l'on peux écrire t comme une fonction de θ. On a supposé implicitement que $t \leftrightarrow \theta$ est une C^1- difféomorphisme. Ceci est vérifié si la vitesse de la souris ne s'annule pas.