Corrigé du problème 3

On note T la variable aléatoire égale au premier instant où apparaît "Pile-Pile" . T est à valeurs dans $\{2,3,\ldots\}$. On note $\mathbb{1}_A$ l'indicatrice d'un événement A . On distingue trois cas selon que la suite des lancers de pièces commence par face (f), pile-face (pf) et pile-pile (pp) : $T = T\mathbb{1}_f + T\mathbb{1}_{pf} + T\mathbb{1}_{pp}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T\mathbb{1}_f) + \mathbb{E}(T\mathbb{1}_{pf}) + \mathbb{E}(T\mathbb{1}_{pp}).$$

– pour le premier terme, on écrit $T = 1 + T'$. T' ne dépend que des lancers numéro 2, 3, etc... Les lancers sont indépendants, on en déduit que les variables aléatoires T' et $\mathbb{1}_f$ sont indépendantes. De plus T' et T ont même loi donc en particulier $\mathbb{E}(T') = \mathbb{E}(T)$. On obtient alors :

$$\mathbb{E}(T\mathbb{1}_f) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_f) + \mathbb{E}(T'\mathbb{1}_f) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_f) + \mathbb{E}(T')\mathbb{E}(\mathbb{1}_f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}(T).$$

– pour le second terme, on écrit de même $T = 2 + T''$ où T'' (de même loi que T) est indépendante de $\mathbb{1}_{pf}$. On a alors

$$\mathbb{E}(T\mathbb{1}_{pf}) = 2\mathbb{E}(\mathbb{1}_{pf}) + \mathbb{E}(T'')\mathbb{E}(\mathbb{1}_{pf}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathbb{E}(T).$$

– $T\mathbb{1}_{pp}$ est égal à $2\mathbb{1}_{pp}$ donc $\mathbb{E}(T\mathbb{1}_{pp}) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi $\mathbb{E}(T)$ vérifie l'équation :

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}(T) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathbb{E}(T) + \frac{1}{2}$$

ce qui aboutit à $\mathbb{E}(T) = 6$. Il faut en moyenne lancer 6 fois une pièce de monnaie équilibrée pour faire apparaître le premier Pile-Pile.