Mathématiques - brevet de technicien supérieur
session 2008 - groupement A
Éléments de correction

Exercice 1 :

Spécialités CIRA, IRIST, Systèmes électroniques et TPIL

1. (a) On a $e(t) = U(t)$ alors $E(p) = \dfrac{1}{p}$.
   On obtient alors

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{1}{p(1+2p)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{p\left(p+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

   (b) On a, par réduction au même dénominateur,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+\frac{1}{2}} &= \frac{\alpha\left(p+\frac{1}{2}\right)+\beta p}{p\left(p+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)p+\frac{\alpha}{2}}{p\left(p+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

   Par identification avec la relation de la question précédente, on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

   d'où

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

   c'est-à-dire

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{2}}$$

   (c) L'originale de $\dfrac{1}{p}$ est la fonction échelon unité $U(t)$ et l'originale de $\dfrac{1}{p+\frac{1}{2}}$ est $\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}U(t)$. Alors

$$s(t) = \left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)U(t)$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} F(z) &= H\left(\frac{10z-10}{z+1}\right) \\ &= \frac{1}{1+2\frac{10z-10}{z+1}} \\ &= \frac{z+1}{(z+1)+2(10z-10)} \\ &= \frac{z+1}{21z-19} \end{aligned}$$

(b) On a $x(n) = U(0,2n)$ alors $X(z) = \dfrac{z}{z-1}$

(c) On obtient alors $Y(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)(21z-19)}$.
On a, par réduction au même dénominateur,

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z-1} - \frac{20}{21}\left(\frac{z}{z-\frac{19}{21}}\right) &= \frac{z}{z-1} - \frac{20z}{21z-19} \\
&= \frac{z(21z-19) - 20z(z-1)}{(z-1)(21z-19)} \\
&= \frac{z(z+1)}{(z-1)(21z-19)} \\
&= Y(z)
\end{aligned}$$

L'originale de $\dfrac{z}{z-1}$ est $e(n) = 1$ et l'originale de $\dfrac{z}{z-\frac{19}{21}}$ est $\left(\dfrac{19}{21}\right)^n$, par conséquent, on obtient

$$y(n) = 1 - \frac{20}{21}\left(\frac{19}{21}\right)^n \quad \text{pour tout nombre entier naturel } n$$

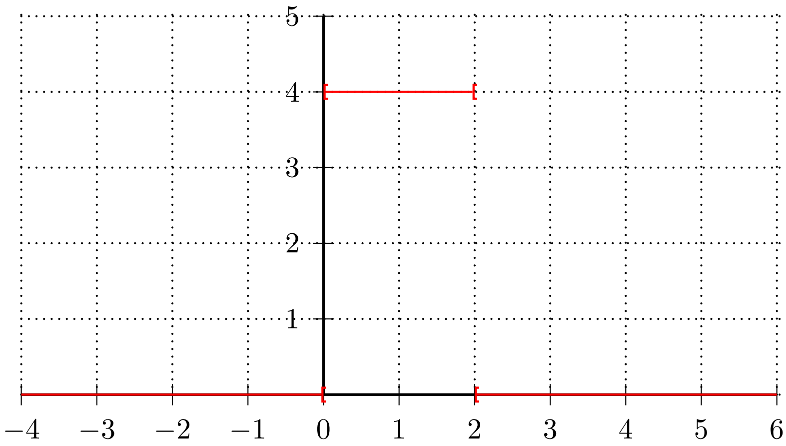
3. Annexe complétée :

n	$y(n)$	$t = 0,2n$	$s(t)$
0	0,048	0	0
1	0,138	0,2	0,095
5	0,423	1	0,393
10	0,650	2	0,632
15	0,788	3	0,777
20	0,871	4	0,865
25	0,922	5	0,918
50	0,994	10	0,993

Exercice 1 :

Spécialités Électrotechnique et Génie optique

1. (a) Représentation graphique de la fonction e :



(b) On a

$$\mathcal{L}\left[U(t)\right] = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}\left[U(t-2)\right] = \mathcal{L}\left[U(t)\right]\mathrm{e}^{-2p} = \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-2p}$$

d'où

$$E(p) = \frac{4}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-2p}\right)$$

2. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[s'(t)\right] &= pS(p) - s(0) \quad \text{avec } s(0) = 0 \\ &= pS(p) \end{aligned}$$

d'où, en prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle,

$$\begin{aligned} 4pS(p) + S(p) &= E(p) \\ 4\left(p + \frac{1}{4}\right)S(p) &= E(p) \\ 4\left(p + \frac{1}{4}\right)S(p) &= \frac{4}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-2p}\right) \\ S(p) &= \frac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)}\left(1 - \mathrm{e}^{-2p}\right) \end{aligned}$$

3. On a, par réduction au même dénominateur,

$$\begin{aligned} \frac{a}{p} + \frac{b}{p + \frac{1}{4}} &= \frac{a\left(p + \frac{1}{4}\right) + bp}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{(a+b)p + \frac{a}{4}}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)} \end{aligned}$$

Par identification avec la relation demandée, on obtient le système

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \dfrac{a}{4} = 1 \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$$
c'est-à-dire
$$S(p) = \frac{4}{p} - \frac{4}{p + \frac{1}{4}}$$

4. Par lecture de la table des transformées de Laplace, on a :

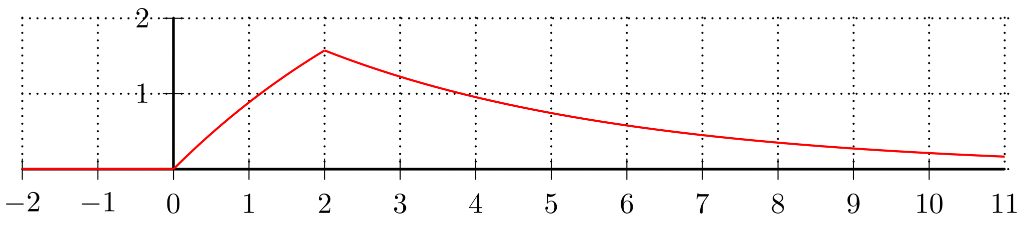
$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-2p}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$	$U(t-2)$	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}U(t)$	$\mathrm{e}^{-\frac{t-2}{4}}U(t-2)$

5. (a) À l'aide du tableau précédent, on obtient alors pour tout réel t,
$$s(t) = 4\left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\right]U(t) - 4\left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-2}{4}}\right]U(t-2)$$
   (b) Par conséquent,
   – comme $U(t) = 0$ pour $t < 0$, on a $s(t) = 0$ pour $t < 0$;
   – $U(t) = 1$ pour $t \geqslant 0$ et $U(t-2) = 0$ pour $t < 2$, alors $s(t) = 4\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\right)$ pour $0 \leqslant t < 2$;
   – pour $t \geqslant 2$, $U(t) = 1$ et $U(t-2) = 1$, alors
$$\begin{aligned} s(t) &= 4\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\right) - 4\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-2}{4}}\right) \\ &= -4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + 4\mathrm{e}^{-\frac{t-2}{4}} \\ &= -4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \\ &= 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1\right) \end{aligned}$$

6. (a) La fonction s est dérivable sur $]0\,;2[$ et $s'(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}$, expression strictement positive sur $]0\,;2[$, par conséquent la fonction s est strictement croissante sur $[0\,;2[$.
   (b) On a $\lim\limits_{t\to 2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ alors $\lim\limits_{\substack{t\to 2\\ t<2}} s(t) = 4\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$.

7. (a) La fonction s est dérivable sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ et on a
$$s'(t) = -\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1\right)$$
   avec $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1 > 0$, alors $s'(t) < 0$ c'est-à-dire que la fonction s est strictement décroissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.
   (b) On a, à l'aide du théorème sur la limite des fonctions composées, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} = 0$ alors
$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = 0$$

8. Courbe représentative de la fonction s :



Exercice 2 :

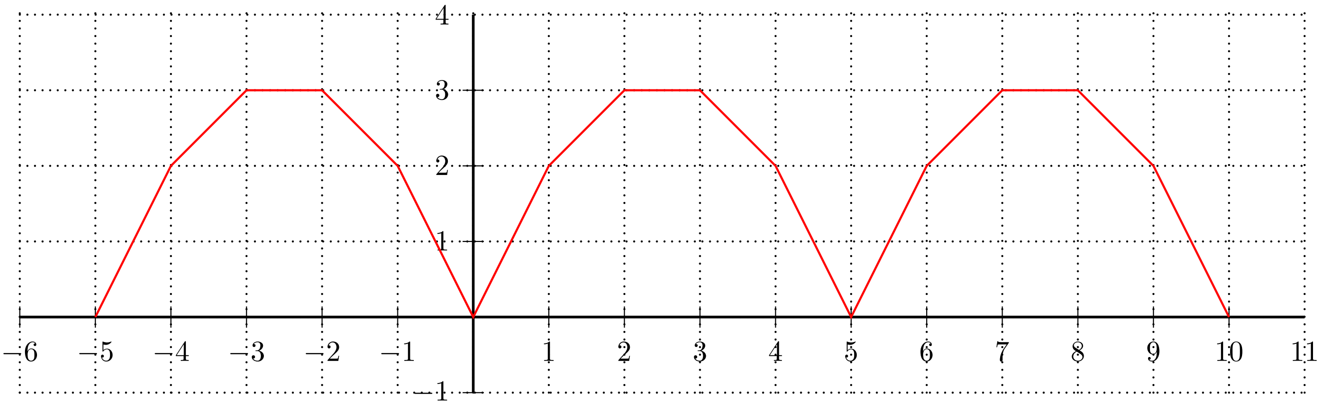
Toutes spécialités

Partie A :

1. Comme $E = 2$, on a

$$f(t) = \begin{cases} 2 \times t & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ t+1 & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ 3 & \text{si } 2 \leqslant t \leqslant \frac{5}{2} \end{cases}$$

2. Représentation graphique :



Partie B :

1. On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{la fonction est paire} \\ &= \frac{2}{5}\left[\int_0^1 Et\,\mathrm{d}t + \int_1^2 [(3-E)t+2E-3]\,\mathrm{d}t + \int_2^{\frac{5}{2}} 3\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{2}{5}\left[\left[\frac{Et^2}{2}\right]_0^1 + \left[(3-E)\frac{t^2}{2}+(2E-3)t\right]_1^2 + 3\left(\frac{5}{2}-2\right)\right] \\ &= \frac{2}{5}(E+3) \\ &= 2\frac{E+3}{5} \end{aligned}$$

2. Comme la fonction f est paire, alors, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, $b_n = 0$.
3. (a) On intègre par parties en posant

$$\begin{aligned} u(t) &= t & \text{alors} \quad & u'(t) = 1 \\ v'(t) &= \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) & \text{alors} \quad & v(t) = \frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 t\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{5t}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\right]_0^1 - \frac{5}{2n\pi}\int_0^1 \sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right) - \frac{5}{2n\pi}\left[-\frac{5}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + \frac{25}{4n^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)\,\mathrm{d}t \quad \text{or } f \text{ est paire}\\
&= \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec } T=5\\
&= \frac{4}{5}\int_{0}^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

alors avec le résultat énoncé,

$$a_n = \frac{5}{n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-E\right).$$

4. (a) On a $u_5(t) = a_5\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)$ avec a_5 donné par la formule précédente.

$$\begin{aligned}
a_5 &= \frac{5}{5^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2\times 5\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4\times 5\pi}{5}\right)-E\right)\\
&= \frac{5}{5^2\pi^2}\left((2E-3)\cos(2\pi)+(3-E)\cos(4\pi)-E\right)\\
&= 0 \quad \text{car } \cos(2\pi)=\cos(4\pi)=1
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{5}{9\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)-E\right)\\
&= \frac{5}{9\pi^2}\left[\left(2\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)-1\right)E-3\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+3\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)\right]
\end{aligned}$$

Et on veut que $u_3(t)=0$ pour tout réel t alors

$$\left(2\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)-1\right)E_0-3\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+3\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)=0$$

D'où

$$\begin{aligned}
E_0 &= 3\frac{\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)}{2\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)-1}\\
&\approx 1,15
\end{aligned}$$

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr