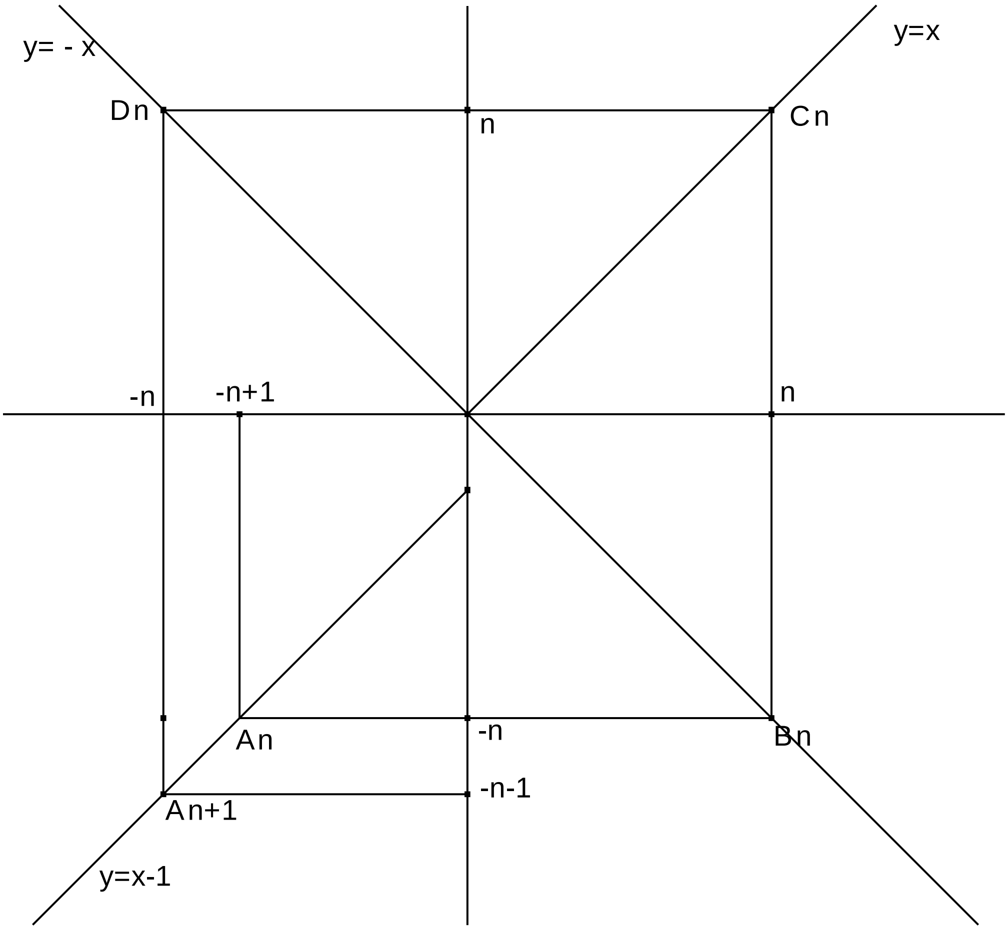
Exercice 1 : La « spirale »

Commençons par des considérations générales.



Notons que la spirale est une réunion de segments dont les sommets sont situés sur trois droites D_1 , D_2 et D_3 dont les équations sont simples à trouver, à savoir dans l'ordre où elles ont à intervenir : $y = x - 1$ (D_1), $y = -x$ (D_2) et $y = x$ (D_3) .

Notons A_n le point de D_1 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(-n+1, -n)$.

B_n le point de D_2 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(n, -n)$.

C_n le point de D_3 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : (n, n).

D_n le point de D_2 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : $(-n, n)$.

La spirale n'est alors rien d'autre que la réunion pour $n \in \mathbf{N}^*$ des segments

$$[D_{n-1}A_n], [A_nB_n], [B_nC_n] \text{ et } [C_nD_n]$$

de longueurs respectives $2n-1$, $2n-1$, $2n$ et $2n$.

Le point O peut être considéré comme le point D_0 .

On conjecture facilement que les points A_n et C_n ont sont tels que :

$$\boxed{l(A_n) = (2n-1)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{l(C_n) = (2n)^2}$$

Démontrons-le :

$$\begin{aligned} l(A_n) &= OA_1 + A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_2 + ... + B_{n-1}C_{n-1} + C_{n-1}D_{n-1} + D_{n-1}A_n \\ &= 1+1+2+2+3+...+(2n-2)+(2n-2)+(2n-1) \\ &= 2.(1+2+3+...+(2n-2)) + (2n-1)) \\ &= 2.\frac{(2n-2)(2n-1)}{2} + (2n-1)) = (2n-2)(2n-1)+(2n-1) \\ &= (2n-1)((2n-2)+1) = (2n-1)^2 \end{aligned}$$

et $l(C_n) = l(A_n) + A_nB_n + B_nC_n = (2n-1)^2 + (2n-1) + 2n = 4n^2 = (2n)^2$

1. Il existe deux points A de l'axe des abscisses tels que $OA = 5$, l'un d'abscisse 5, l'autre d'abscisse -5.

   $\boxed{1^{\text{ier}} \text{ cas : } A(5,0)}$

   Ce point est sur le segment $[B_5C_5]$;

   en effet on a $B_5(5,-5)$ et $C_5(5,5)$ avec $AC_5 = 5$.

   Ainsi $l(A) = l(C_5) - 5 = 10^2 - 5 = \boxed{95}$.

   $\boxed{2^{\text{ième}} \text{ cas : } A'(-5,0)}$

   Ce point est sur le segment $[D_5A_6]$ ($D_5(-5,5)$, $A_6(-5,-6)$;) avec $A'A_6 = 6$.

   Ainsi $l(A') = l(A_6) - 6 = 11^2 - 6 = \boxed{115}$.

2. $B(2005,2006)$ est sur le segment $[C_{2006}D_{2006}]$;

   en effet on a $C_{2006}(2006,2006)$ et $D_5(-2006,2006)$ avec $C_{2006}B = 1$.

   Ainsi $l(B) = l(C_{2006}) + 1 = 4012^2 + 1 = \boxed{16\ 096\ 145}$.

3. On cherche ici le point C tel que $l(C) = 2006$.

   Or, la suite des nombres

   $l(O) = 0$, $l(A_1) = 1$, $l(C_1) = 4$, $l(A_2) = 9$, $l(C_2) = 16$,…,

   … $l(A_n) = (2n-1)^2$, $l(C_n) = (2n)^2$

   est la suite des carrés des entiers naturels (ou « carrés parfaits »).
   Il suffit donc d'abord d'encadrer 2006 par deux carrés parfaits successifs :

   $$l(C_{22}) = 44^2 = 1936 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23}).$$

   De plus $C_{22}D_{22} = 44$ donc

   $$l(D_{22}) = 1936 + 44 = 1980 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23})$$

   donc $C \in [D_{22}A_{23}]$.

   Enfin : $2006 - 1980 = 26$ donc $\begin{cases} x_C = -22 = x_{D_{22}} = x_{A_{23}} \\ y_c = x_{D_{22}} - 26 = 22 - 26 = -4 \end{cases}$

   Donc C a pour coordonnées $\boxed{(-22,-4)}$.

4. Soit $D(p,q)$ un point à coordonnées entières.
Eliminons immédiatement le cas où $p=q=0$ auquel cas $D=O$.
Notons $n=\max(|p|,|q|)$.

$\boxed{\text{Si } n=|p|}$ alors $|q| \leqslant n$ donc $-n \leqslant q \leqslant n$ et $p \in \{-n,n\}$.

Si $p=n$ alors $D(n,q)$ avec $-n \leqslant q \leqslant n$ est sur le segment $[B_nC_n]$

car $\begin{cases} x_{B_n} = x_D = n = x_{C_n} \\ y_{B_n} = -n \leqslant y_D \leqslant y_{C_n} = n \end{cases}$

Si $p=-n$ alors $D(-n,q)$ avec $-n \leqslant q \leqslant n$ est sur le segment $[D_nA_{n+1}]$

car $\begin{cases} x_{A_{n+1}} = x_D = -n = x_{D_n} \\ y_{A_{n+1}} = -n-1 < -n \leqslant y_D \leqslant y_{D_n} = n \end{cases}$

$\boxed{\text{Si } n \neq |p|}$ alors $|p| < |q| = \max(|p|,|q|) = n$:

par suite $|p|<n$ donc $-n<p<n$ et $q \in \{-n,n\}$.

Si $q=n$ alors $D(p,n)$ avec $-n<p<n$ est sur le segment $[C_nD_n]$

car $\begin{cases} x_{D_n} = -n < x_D = p < n = x_{C_n} \\ y_{D_n} = y_D = n = y_{C_n} \end{cases}$

Si $q=-n$ alors $D(p,-n)$ avec $-n<p<n$ est sur le segment $[A_nB_n]$

car $\begin{cases} x_{A_n} = -n+1 \leqslant x_D = p < n = x_{B_n} \\ y_{A_n} = y_D = -n = y_{B_n} \end{cases}$

Ainsi <u>dans tous les cas *D* est sur un des segments qui constituent la spirale</u>.