Le problème des 1 000 portes

Les deux démonstrations suivantes partent de la simplification suivante :

Plutôt que de considérer les 1 000 portes, on en considère une de numéro n. Pour savoir si une porte est finalement ouverte ou fermée, il suffit de connaître la parité du nombre de diviseurs positifs de n.
En effet : si n a un nombre pair de diviseurs, la porte correspondante est initialement fermée, elle change d'état un nombre pair de fois donc elle est finalement fermée. Si n a un nombre impair de diviseurs, la porte est finalement ouverte.

Une première démonstration :

On remarque qu'en général les diviseurs de n vont par deux, sauf si n est un carré.

En effet : si d est un diviseur de n, on peut écrire $n=d\times q$ et si q est différent de d, q est alors un autre diviseur de n. S'il existe un q égal à d, c'est que n est un carré (celui de d).

Exemples :

- $18=1\times 18=2\times 9=3\times 6$; 18 a donc 6 diviseurs.
- $81=1\times 81=3\times 27=9\times 9$; 81 a donc 5 diviseurs.

Une deuxième démonstration :

On écrit la décomposition en facteurs premiers de n puis on en déduit son nombre de diviseurs.

$$n=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \text{ où les } p_i \text{ sont des nombres premiers distincts deux à deux.}$$

On obtient tous les diviseurs en choisissant la multiplicité de chaque nombre premier de la décomposition, il y a donc $\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)$ diviseurs positifs de n. Ce nombre est impair si et seulement si tous les α_i+1 sont impairs autrement dit si et seulement si tous les α_i sont pairs.

Reste à remarquer que tous les α_i sont pairs si et seulement si n est un carré.

Exemples :

- $18=2\times 3^2$; les 6 diviseurs sont : $2^0\times 3^0$; $2^0\times 3^1$; $2^0\times 3^2$; $2^1\times 3^0$; $2^1\times 3^1$; $2^1\times 3^2$.
- $81=3^4$; les 5 diviseurs sont : 3^0 ; 3^1 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4.

Les portes ouvertes sont donc celles dont le numéro est un carré, la 23ème est la numéro $23^2=529$.