Nouveau programme de TS (obligatoire) : recueil d’exercices

# Divers

**Exercice 1 : lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de **

L’objectif de cet exercice est de démontrer que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables.

Il s’agit aussi d’illustrer le commentaire du programme : « On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de ».

1ere partie

L’objectif de cette partie est de démontrer que  et que 

1. Soit *x* un nombre réel, 0 < *x* < . A tout réel *x*, on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique dont les coordonnées cartésiennes sont (cos *x* ; sin *x*).

Soient A (1 ; 0) et T(1, tan *x*)



**a)** Déterminer en fonction de x, les aires des triangles OAM, OAT, puis l’aire du secteur circulaire (de centre 0) délimité par les points A et M.

**b)** En déduire l’encadrement suivant pour tout réel 0 < x < .: .

**c)** Déterminer alors 

1. Démontrer que 

On a donc démontré que 

1. Démontrer que  *(on pourra utiliser que « pour tout réel x, cosx = 1-2sin²(x/2) »)*

2ème partie

L’objectif de cette partie est de démontrer que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables et de déterminer leurs fonctions dérivées.

1. Démontrer que pour tous réels a et h, 
2. En déduire que la fonction sinus est dérivable sur et déterminer sa fonction dérivée.
3. Démontrer de même que la fonction cosinus est dérivable sur R et déterminer sa fonction dérivée

**Exercice 2 : démonstration du théorème du toit**

L’objectif de cet exercice est de démontrer le théorème du toit :

« Soient deux plans (P) et (Q) sécants et (d3) leur intersection. Si un troisième plan (R) coupe le plan

(P) selon la droite (d2), le plan (Q) selon la droite (d1) et si (d2) est parallèle à (d3) alors les droites (d3) et (d1) sont parallèles »

On suppose connu le résultat suivant :

« Si deux droites sont coplanaires alors elles sont soit parallèles soit sécantes »



**1)** Démontrer que les droites (d1) et (d3) sont coplanaires. Que peut-on en déduire sur leur position relative ?

**2) a)** Supposons par l’absurde que (d1) et (d3) sont sécantes : soit M leur point d’intersection. Démontrer qu’alors M ∈ (d2).

**b)** Conclure.

# Loi normale : *d’après document ressources*

## Exercice 3 : Calcul de probabilités à l’aide de la loi normale

La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race FFPN peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne µ = 6000 et d’écart-type σ = 400. La fonction g désigne la fonction de densité de cette loi normale.

1. Afin de gérer au plus près son quota laitier (production maximale autorisée), en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite disposer de certaines probabilités.
2. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5900 et 6100 litres de lait par an.
3. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres par an.
4. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6250 litres par an.
5. Dans son futur troupeau, l’éleveur souhaite connaître :

a) la production maximale prévisible des 30% de vaches les moins productives du troupeau.
Il s’agit de déterminer la valeur x de X telle que P(X < x) = 0,30.

b) la production minimale prévisible des 20% des vaches les plus productives.
Il s’agit de déterminer la valeur x de X telle que P(X > x) = 0,20.

## Exercice 4 : Centrer et réduire une variable aléatoire, utilisation de

Une coopérative produit du beurre en microplaquettes de 12,5g pour des collectivités et des chaînes hôtelières. Les microplaquettes sont conditionnées dans des boîtes de 40. La masse des microplaquettes peut être modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale d’espérance *μ* = 12,5 et de variance *σ²* = 0,2² et on admet que la variable aléatoire *X* égale à la masse d’une boîte de 40 microplaquettes suit alors une loi normale d’espérance μ = 500 et de variance *σ*² = 1,6.

La boîte est jugée conforme si sa masse est comprise entre 496,2 g et 503,8 g.

1. Calculer la probabilité qu’une boîte prélevée aléatoirement en fin de chaîne de conditionnement soit non conforme.
2. Pour contrôler le réglage de la machine, on détermine des poids d'alerte μ − h et μ + h tels que
P(μ − h < X < μ + h) = 0,99. Ces poids d’alerte sont inscrits sur une carte de contrôle et correspondent à une marge de sécurité en lien avec des normes de conformité. Calculer les poids d'alerte.

## Exercice 5 : Centrer et réduire une variable aléatoire

Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité *X* (en cl) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cl peut être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne *μ* et d’écart-type *σ* = 2.

La législation impose qu'il y ait moins de 0,1% de bouteilles contenant moins d'un litre.

1. À quelle valeur de la moyenne *μ* doit-on régler la machine pour respecter cette législation?
2. La contenance des bouteilles étant de 110cl, quelle est alors la probabilité qu’une bouteille déborde lors du remplissage ?
3. Le directeur de la coopérative veut qu’il y ait moins de 1% de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation.
a) Quelle est alors la valeur de *μ*?
b) Quelle est dans les conditions de la question a) la probabilité que la bouteille contienne moins d’un litre ?
c) Déterminer *μ* et *σ* afin qu’il y ait moins de 0,1% de bouteilles de moins d’un litre ET moins de 1% de bouteilles qui débordent.

## Exercice 6 : Centrer et réduire une variable aléatoire, utilisation de

La durée de vie d'un certain type d’appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d’écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80 % de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de *μ* et *σ*² ?
2. Quelle est la probabilité d’avoir un appareil dont la durée de vie est comprise entre 200 jours et 230 jours ?

# Intervalle de fluctuation : *d’après document ressources*

## Exercice 7 :

On admet que dans la population d’enfants de 11 à 14 ans d’un département français le pourcentage d’enfants ayant déjà eu une crise d’asthme dans leur vie est de 13%.

Un médecin d’une ville de ce département est surpris du nombre important d’enfants le consultant ayant des crises d’asthme et en informe les services sanitaires. Ceux–ci décident d’entreprendre une étude et d’évaluer la proportion d’enfants de 11 à 14 ans ayant déjà eu des crises d’asthme. Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville.

La règle de décision prise est la suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l’intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.

1. Déterminer l’intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de jeunes de 11 à 14 ans ayant eu une crise d’asthme dans un échantillon de taille 100.
2. L’étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d’asthme.
Que pouvez-vous conclure ?
3. Le médecin n’est pas convaincu par cette conclusion et déclare que le nombre de personnes interrogées était insuffisant pour mettre en évidence qu’il y avait plus de jeunes ayant eu des crises d’asthme que dans le reste du département. Combien faudrait-il prendre de sujets pour qu’une proportion observée de 19% soit en dehors de l’intervalle de fluctuation asymptotique ?
4. Représenter graphiquement la taille de l’échantillon nécessaire en fonction de la valeur *psup* de la borne supérieure de l’intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

## Exercice 8 :

Une compagnie aérienne possède des A340 (longs courriers) d’une capacité de 300 places.
Cette compagnie a vendu *n* billets pour le vol 2012.
La probabilité pour qu’un acheteur se présente à l’embarquement est *p* et les comportements des acheteurs sont indépendants les uns des autres.
On note *Xn* la variable aléatoire désignant le nombre d’acheteurs d’un billet se présentant à l’embarquement.
La compagnie cherche à optimiser le remplissage de l’avion en vendant éventuellement plus de places que la capacité totale de l’avion (surréservation ou surbooking) soit ici n > 300.
Comme il y a évidemment un risque que le nombre de passagers munis d’un billet se présentant à l’embarquement excède 300, la compagnie veut maîtriser ce risque.

1. Déterminer la loi de *Xn*.
2. On suppose que 0,5 ≤ *p ≤*  0,95 .
Écrire l’intervalle de fluctuation asymptotique *In* de  au seuil de 0,95.
3. Montrer que si  alors la probabilité que le nombre de passagers se présentant à l’embarquement excède 300 est inférieure à 0,05.
4. On cherche à déterminer la valeur de *n* maximale permettant de satisfaire la condition de l’inclusion 

**a.** Montrer que  ⇒ .

**b.** On pose *f* (*x*) = . Montrer qu’il existe un entier *n*0 unique tel que si *n* ≤ *n*0 alors *f* (*n*) ≤ 0 et si *n* > *n*0 alors *f* (*n*) > 0 .

**c.** Tracer la courbe représentative de *f* pour les valeurs *p* = 0,85 ; *p* = 0,9 ; *p* = 0,95.

**d.** Déterminer à la calculatrice les valeurs de *n*0 pour *p* = 0,85 ; *p* = 0,9 ; *p* = 0,95.

# Intervalle de confiance : *d’après document ressources*

## Exercice 9 :

Le 18 avril 2002, l’institut IPSOS effectue un sondage dans la population en âge de voter.
On constitue un échantillon de 1000 personnes (inscrites sur les listes électorales) que l’on suppose choisies ici de manière aléatoire.

Les résultats partiels en sont les suivants : sur les 1000 personnes :

* 135 ont déclaré vouloir voter pour Jean-Marie Le Pen
* 195 ont déclaré vouloir voter pour Jacques Chirac
* 170 ont déclaré vouloir voter pour Lionel Jospin.
1. Déterminer l’intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% pour chacun des 3 candidats.
2. Que peut-on à priori imaginer sur cette élection ?
3. Les résultats le jour de l’élection étaient 16,9% pour M Le Pen, 19,9% pour M Chirac et16,2%. pour M Jospin. Comparer ces résultats avec les intervalles de confiance.

## Exercice 10 :

Un test de diagnostic rapide effectué sur des sujets ictériques (coloration jaune de la peau, des muqueuses -couche de cellules de protection recouvrant les organes creux en contact avec l’extérieur et du blanc de l’œil –sclérotique-) doit permettre d’estimer si l’ictère est d’origine virale ou non, sans avoir besoin de faire des analyses longues et compliquées. Cependant il est important de pouvoir s’assurer que ce test est de bonne qualité c'est-à-dire qu’il doit pouvoir indiquer correctement si l’ictère est viral ou non. Il doit être capable d’identifier correctement le type d’ictère : il est positif chez les sujets dont l’ictère est viral et négatif sinon.

Une étude est effectuée sur 100 personnes ayant un ictère viral et 100 personnes ayant un ictère d’origine non virale.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Hépatite virale | Ictère d’origine non virale |
| Test positif | 85 | 20 |
| Test négatif | 15 | 80 |

1. Déterminer la proportion de sujets ayant un test positif parmi ceux ayant un ictère viral.
2. Déterminer un intervalle de confiance à 95% de la proportion de tests positifs lorsque l’ictère est viral. Cette proportion est appelée sensibilité du test diagnostic, c'est-à-dire la probabilité qu’une personne ayant un ictère viral réagisse au test. Un test diagnostic sera d’autant meilleur que la sensibilité est importante.
3. Déterminer la proportion de sujets ayant un test négatif parmi celles ayant un ictère non viral.
4. Déterminer un intervalle de confiance à 95% de la proportion de tests négatifs lorsque l’ictère est non viral. Cette proportion est appelée spécificité du test diagnostic, c'est-à-dire la probabilité qu’une personne ayant un ictère non viral ne réagisse pas au test. Un test diagnostic sera d’autant meilleur que la spécificité est importante.

# Pour aller plus loin

## Exercice 11 :

L’objectif de cet exercice est de démontrer de deux manières différentes que 

1ere méthode : par changement de variable.

*Pré-requis*

On admet le théorème suivant :

Soit f une fonction de deux variables, continue sur [a,b]×[c,d], à  valeurs dans **C**. Alors



1. Démontrer que cest bien intégrable sur R
2. Soit a un réel positif. On pose I(a) = . Démontrer que I(a)² = pour tout réel a positif.
3. Soit Da le domaine défini par Da = {(rcosθ ; rsinθ) avec 0 ≤ r ≤ a et 0≤ θ ≤ π/2 }.

On pose J(a) =. Démontrer que J(a) =  pour tout réel a positif.

1. En déduire la limite de J(a) quand a tend vers +∞.
2. Expliquer pourquoi J(a) ≤ I(a)² ≤ J(a) pour tout réel a positif.
3. Déduire des questions précédentes la limite de I(a)² quand a tend vers +∞.
4. Déterminer alors 

2ème méthode : avec les intégrales dépendant d’un paramètre.

On admet le théorème suivant :

Soit I un intervalle de R. Si F est une fonction de deux variables, continue sur I×[a ; b] et si existe et est continue sur I×[a ; b] alors l’application f définie sur I par f(x) =  est dérivable sur I et f’(x) = 

Soit f la fonction définie sur R par f(x) = 

1. Démontrer que f est dérivable sur R
2. Démontrer que f’(x) =  pour tout réel x (on pourra utiliser un changement de variable de la forme u = tx).
3. En déduire que pour tout réel x, f’(x) = -2g’(x) g(x) où g est définie sur R par g(x) = 
4. Calculer f(0) et en déduire que pour tout réel x, f(x) = - (g(x))².
5. Démontrer que la limite de f à l’infini est égale à 0 (on pourra utiliser l’encadrement valable pour tout réel x, 0 ≤ f(x) ≤ )
6. Déterminer alors .

## Exercice 12 :

Soit la fonction définie sur par : .

L’objet de l’exercice 1 était de démontrer que : .

 étant continue, positive sur et telle que , est une densité de probabilité : c’est la densité de la loi normale centrée réduite notée **N(0,1).**

1. Etudier la fonction sur et donner l’allure de sa courbe représentative.
2. On dit qu’une variable aléatoire suit la loi normale centrée réduite lorsque sa fonction de répartition est donnée par :
3. Etablir que réalise une bijection de sur ]0 ;1[.
4. Montrer que pour tout
5. Soit une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite,

Démontrer que : , il existe un unique réel positif tel que

*(on pourra remarquer que pour tout réel u > 0, P(-u ≤ X ≤ u) = 2 P(0 ≤ X ≤ u) et appliquer un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)*

1. Soit une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, démontrer que :
	1. admet une espérance et que
	2. admet une variance et que

*(on remarquera que V(X) = E((X-E(X))²) puis utiliser une intégration par parties)*

## Exercice 13 :

*On rappelle les définitions suivantes :*

**Définition 1 :** Soit *X* une variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet.

Soient t et h deux réels positifs.

On dit que *X* suit la propriété de durée de vie sans vieillissement lorsque la probabilité que l'individu (ou l'objet) soit vivant (ou fonctionne) à l'instant *t* + *h* sachant qu'il est vivant (ou qu'il fonctionne) à l'instant *t* ne dépend pas de son âge *t.* Autrement dit, lorsque *P* (*X ≥ t*) (*X ≥ t* + *h*) = *P*(*X ≥ h*).

**Définition 2 :** Une variable aléatoire à densité X suit la loi exponentielle de paramètre λ > 0 lorsque sa densité est la fonction f définie sur [0 ; +∞[ par f(x) = λ e-λx .

1. Démontrer que si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle, alors elle suit la propriété de durée de vie sans vieillissement.
2. L’objectif de cette question est de démontrer la propriété réciproque du 1).

Soit X une variable aléatoire qui suit une propriété de durée de vie sans vieillissement.

Soit F la fonction de répartition de X et ϕ la fonction définie sur [0 : +∞[ par ϕ(t) = 1 – F(t).

**a)** Démontrer que ϕ(0)=1 et que pour tous réels h et t positifs, ϕ(t+h) = ϕ(t) ϕ(h).

**b)** En déduire une expression de ϕ, puis de F.

**c)** En déduire que X suit bien la loi exponentielle.