« Le numérique au cycle trois»

Angoulême
Le 9 Janvier 2013

UNIVERSITÉ BORDEAUX SEGALEN

briandjoel@free.fr

Equipe Euromaths.

Plan

Partie 1

- 1-1 Qu’est ce que faire des mathématiques à l’école?
- 1-2 Outillage théorique

Partie 2

- 2-1 Développer une culture de la droite numérique
- 2-2 La numération
- 2-3 Une construction progressive des algorithmes
- 2-4 Les décimaux
- 2-5 Des lacunes dans les programmes.

1-1
En guise d’introduction

Construire une leçon

L'introduction de la somme de deux décimaux

Antécédents :

Les écritures à virgule ont été introduites à partir des fractions décimales

5 scénarios…

- *Situation 1 :* Le professeur commente chiffre par chiffre, au tableau, la technique pour calculer 1,45 + 2,7. Les élèves répètent le procédé vu dans les nombres entiers et apprennent à mettre la virgule à l'endroit adapté.

- *Situation 2 :* Le professeur explique la technique en s'appuyant sur les savoirs des fractions. Il fait ensuit le lien entre savoirs faire anciens et nouveaux (addition en colonne).

- ***Situation 3 :*** *Lecture de l'énoncé écrit au tableau : « Pour construire une grande frise chronologique, des enfants mettent bout à bout deux bandes de carton. La première mesure 1,45 m et la seconde mesure 2,7 m. Quelle est la longueur de la bande ainsi obtenue ? ».*

    Travail individuel ou par groupes. Ecriture des démarches sur une grande feuille qui sera affichée éventuellement au tableau. Synthèse collective.

- ***Situation 4*** *: Par groupe : deux baguettes de longueurs connues et affichées : 1,45m et 2,7m. Consigne : « Je vous demande de trouver la longueur de la baguette obtenue en mettant ces deux baguettes bout à bout ». Les élèves disposent de mètres. Ils mesurent et trouvent la longueur totale. Synthèse collective à l'aide des écritures numériques.*

- ***Situation 5*** *: Dans la classe, deux baguettes de longueurs connues et affichées: 1,45m et 2,7m. Consigne : « Prévoyez par le calcul la longueur de la baguette obtenue lorsque l'on mettra ces deux bout à bout ». Recueil des prévisions, mesurage effectif, analyse.*

Ce qui caractérise ces situations

	Situation 1 (répétiteur)	Situation 2 (fractions)	Situation 3 (énoncé)	Situation 4 (baguettes)	Situation 5 (prévision)
Problème posé	non	non	Oui (à partir d'un énoncé)	Oui (à partir d'un matériel)	Oui (à partir d'un matériel)
Action de l'élève	[illegible]	imiter	Tr[illegible]tat pu[illegible] err[illegible]- ca[illegible]ue)	[illegible]	Prévoir un résultat puis repérer les erreurs par validation pragmatique ou/et syntaxique
Transfert de responsabilité	[illegible]	non (ou maïeutique)	Ou[illegible] én[illegible]e)	[illegible]	Oui (prévoir puis mesurer)
Nature de la tâche	[illegible]	Technique : addition des fractions puis addition en colonne Technologique : validation syntaxique	Te[illegible] Tr[illegible] fra[illegible] ad[illegible] fra[illegible] tra[illegible] Te[illegible] : validation syntaxique	[illegible] infor[illegible].	Technique : Traduire en fractions, additionner des fractions puis traduire Technologique : validation pragmatique et/ou syntaxique

Conserver pour une situation de consolidation

Petite remarque :

Longueurs des bandes : 1,45 m et 2,7 m.

Réponses envisageables dans les scénarii 3, 4 et 5 ?

3,52	**(1 + 2 = 3 et 45 + 7 = 52)**
3,115	**(2 + 1 = 3 et 45 + 70 = 115)**
1,72	**(145 + 27 = 172 puis 1,72)**
4,15	

Que serait-il arrivé si on avait choisi pour les longueurs des bandes 1,4m et 2,5m ???

…. de l'existence des variables didactiques !!!!

Le moment de vérification

En fait

- Pour de multiples raisons, de moins en moins d'enseignants construisent, à des moments cruciaux des apprentissages, des situations de construction des savoirs .
- Ils s'en remettent aux fiches diverses, (internet ou manuels).
- Les « livres du professeur » proposent pourtant ces situations.
- Le fichier ou le manuel de l'élève permet le travail de tous les jours mais ne remplace pas ces moments forts des apprentissages.

- L'illustration, la manipulation mal comprises ne rendent pas non plus de fiers services aux apprentissages…

Idées tenaces

Vu dans "sciences et santé "magazine de l'inserm oct 2011 n°4

→GRAND ANGLE

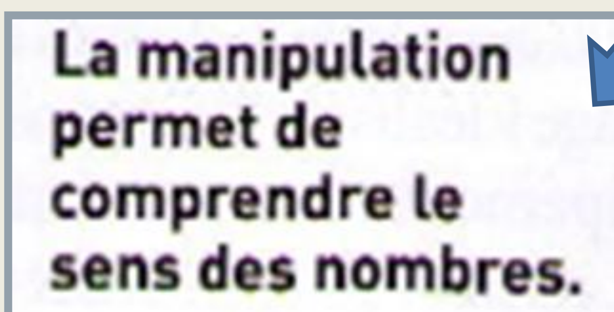
Mathématiques
De l'intuition à la manipulation

Bonne nouvelle pour les enfants qui souffrent lors du calcul mental et des tables de multiplication : nous avons tous à la naissance la « bosse des maths ». Percevoir les nombres et les quantités est en effet inné et universel. Toutefois, cette perception reste approximative. Pour résoudre des opérations exactes, l'apprentissage scolaire est nécessaire, avec comme outil de réussite : la manipulation.

ymboles, on obtiendrait la même chose n opérant sur de vraies quantités dans le nonde réel », précise le chercheur.
à encore, les nombreux exercices où il

La manipulation permet de comprendre le sens des nombres.

re anche, 23 ne correspond à aucun ré ltat dans les tables. »
U autre exemple montre que la m morisation est essentielle à la



La manipulation permet de comprendre le sens des nombres.

Qu'est-ce que faire des mathématiques ?

- **Mathématiser c'est construire un modèle** (produit par un langage : i.e. « moyen d'objectiver et de développer la pensée») en vue d'exercer un contrôle sur un milieu (souvent matériel en début de scolarité). C'est donc :
  - **résoudre des problèmes**

    anticiper le résultat d'une action, émettre des hypothèses, faire des essais, les valider ou les invalider, trouver les mots pour dire…
  - **s'entraîner**
  - **apprendre et retenir.**

- La présence d'un milieu matériel n'implique pas réduction de l'activité à une simple manipulation.
- Faire prévoir $\neq$ illustrer.

- Les mathématiques ne sont pas une science qui vit en cycle fermé et qu’il faudrait visiter.

- Elles se construisent à partir d’expériences, c'est-à-dire d’une confrontation à la réalité qui permet de construire des modèles qui, eux-mêmes auront à interroger la réalité, et ceci, dès l’école primaire.

1-2
Outillage théorique

Cadre théorique de cette intervention

- Apprentissage par adaptation

Approche socio constructiviste de l'apprentissage

(Piaget, Gréco, Vygotski)

- En milieu scolaire (rôle des pairs et de l'enseignant)

Approche didactique des relations entre enseignement et apprentissage

(Brousseau : *(Théorie des situations didactiques),* Chevallard *(théorie anthroplogique)*, Vergnaud *(champs conceptuels)*,…)

Les catégories de situations

- Dans la plupart des situations vues en classe, on peut dire que l'apprentissage se fait par **familiarisation** : l'enfant comprend le problème posé par le professeur ou le manuel ou le fichier et s'efforce de résoudre le problème ou de répondre à la question.
- Les situations telles que le scénario 5 sont d'une autre nature : Il s'agit de construire des dispositifs adaptés à l'âge, aux connaissances, et aux intérêts des élèves concernés en se posant une question d'ordre didactique et une d'ordre plutôt sociologique :
- « Comment construire un dispositif qui questionne et dont la solution optimale est le savoir visé ? »
- « Comment s'assurer que les élèves voient dans ces activités des occasions d'apprendre ? »

Intérêt d’un outillage théorique

- En classe, permet de se doter d’outils qui évitent de rabattre l’enseignement à la transmission des savoirs et permettent de construire des situations régulantes dans lesquelles les élèves mettent en œuvre des connaissances pour aboutir à des savoirs visés par le professeur.

- constitue un outil d’observation indispensable à tout enseignant

- permet de se construire une posture rassurante en classe dans la mesure où « l’inattendu» devient du prévisible !

Les rapports savoir/ connaissances

Nous empruntons à J. CENTENO et G. BROUSSEAU les définitions suivantes :

- **CONNAISSANCES** : "Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.) mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente ou à une exigence sociale.".

- **SAVOIR** : "Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage , sous forme de connaissances ou de savoirs et la production de nouveaux savoirs. Dans certaines situations (action , formulation ou preuve) le même résultat peut être le fruit d'une connaissance de l'acteur ou le fruit d'un savoir, ou les deux.

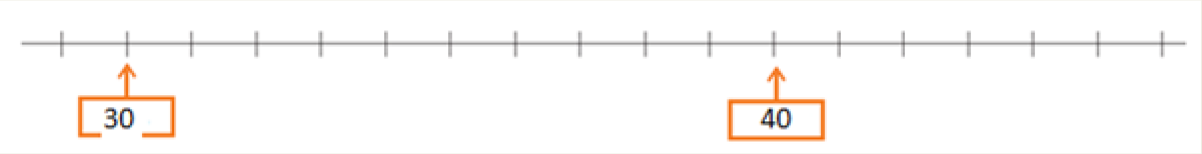
- *« Dans certaines situations, l'élève a besoin de connaissances que l'école n'enseigne pas, mais qu'il doit pourtant mettre en œuvre pour apprendre le savoir ou pour utiliser ce qu'il a appris. »*

PARTIE 2
Points de vigilance

2-1
Développer une culture de la droite numérique

Nécessité de construire une image mentale de la droite numérique

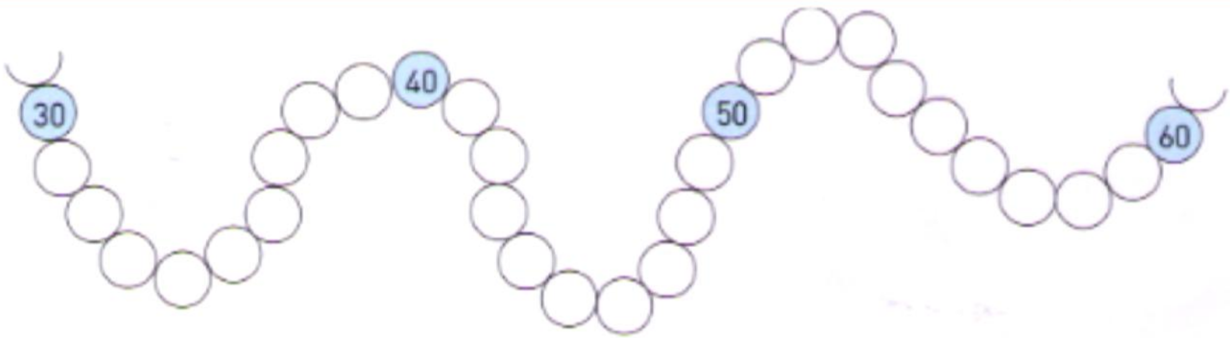
.



- Travailler le lien entre distance (notion géométrique : nombre de graduations) et écart (notion numérique : l’écart 37-15)
- Permet de donner du sens à
  - « 35 est entre 30 et 40 et au milieu »
  - « 35 est à égale distance de 30 et de 40 »
  - « 30 est trois fois plus grand que 10 »
  - « 30 est trois fois plus loin de 0 que 10 »
  - Etc.

Pour cela, dès le cycle 2

La piste des nombres

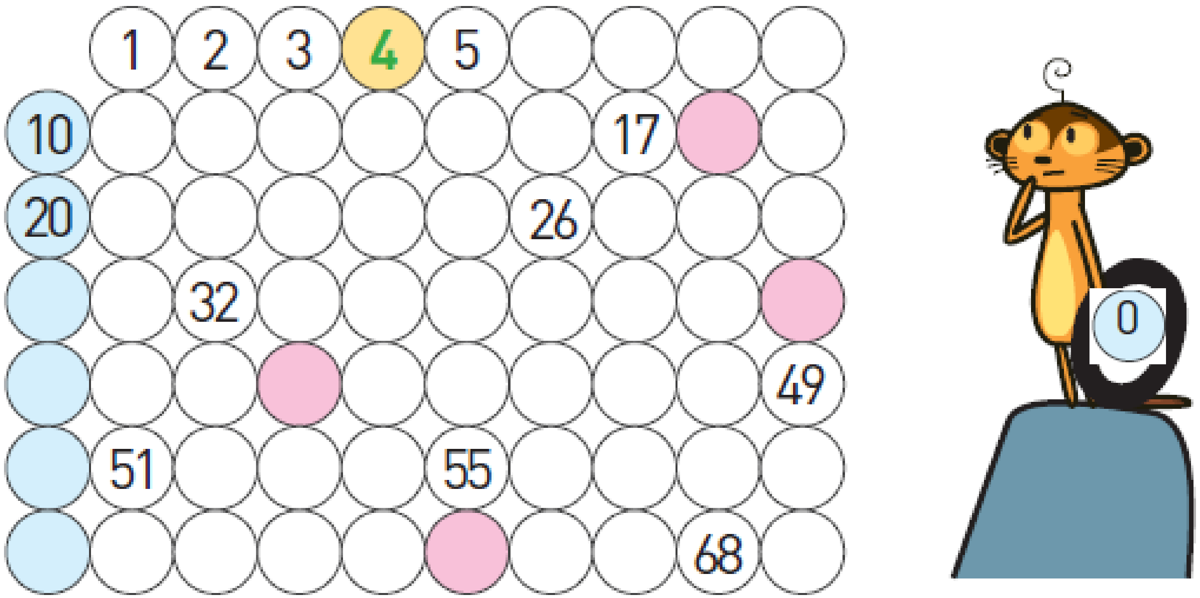


a. Écris le nombre 47 sur la piste.

b. De combien de cases faut-il avancer pour aller à la case 50 ?

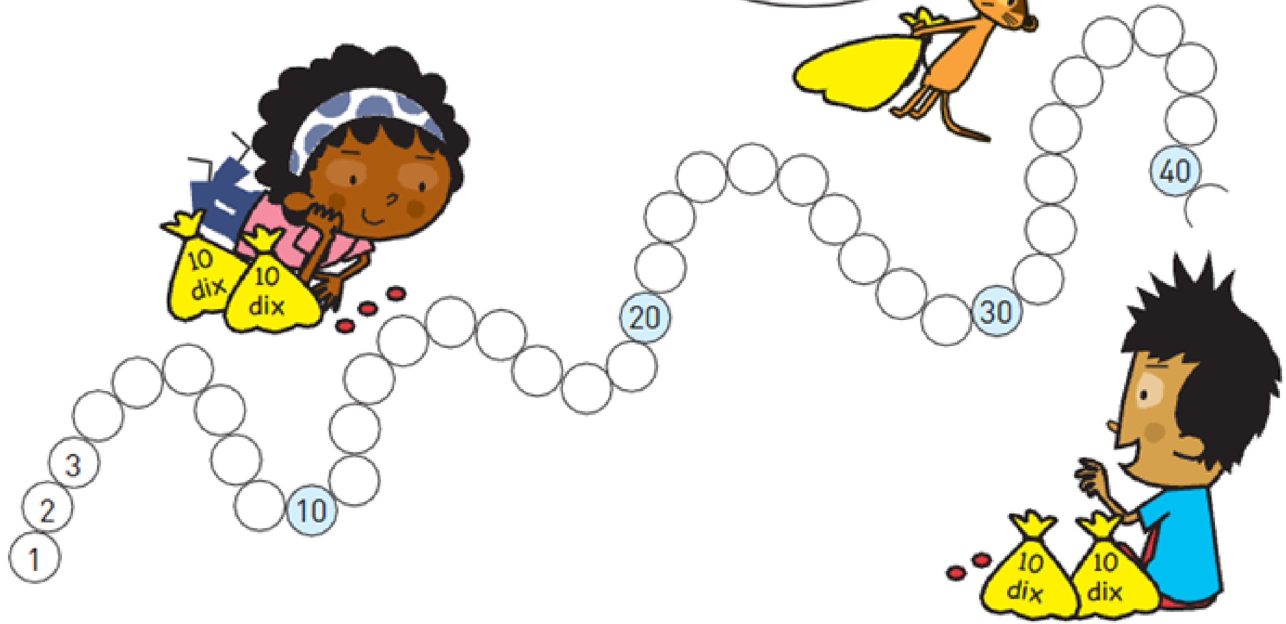
c. De combien de cases faut-il reculer pour aller à la case 40 ?

Activité préparatoire : découper la piste des nombres et la présenter sous forme d'un tableau.



On y associe quantité et position sur la piste des nombres

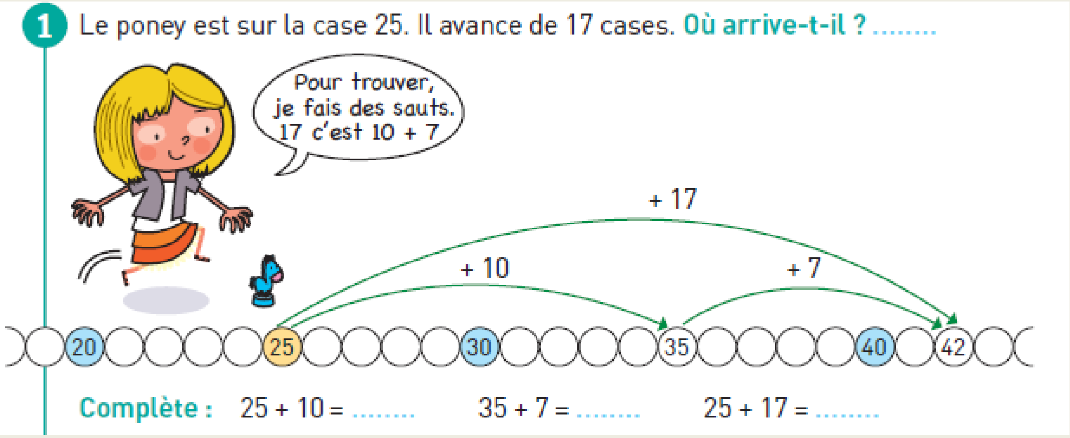
Les enfants posent un jeton sur chaque case en partant de la case 1.

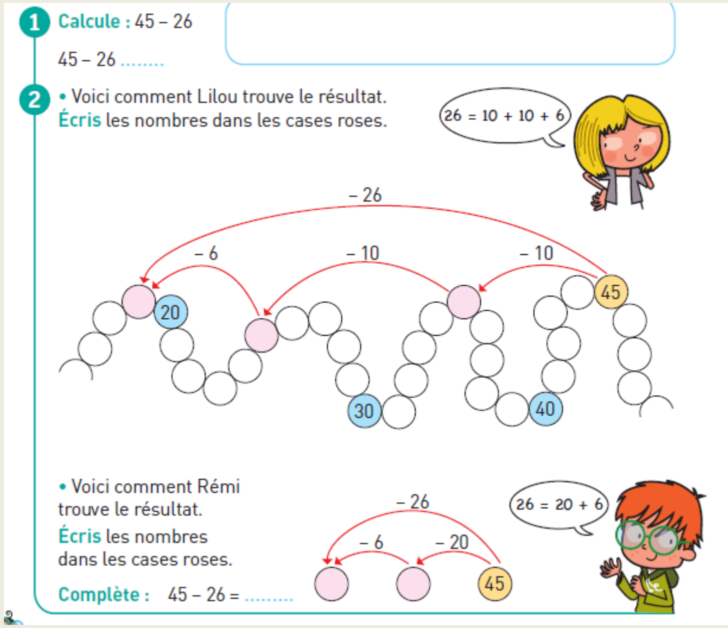


• **Colorie** en **jaune** la case où Jeanne pose son dernier jeton.

Combien de jetons Jeanne avait-elle ? ....

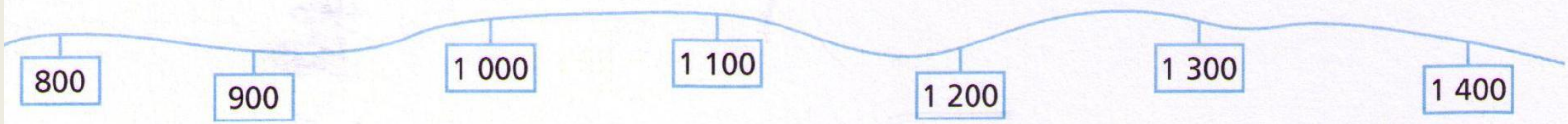
Cela permet une construction progressive de l'addition et de la soustraction en lien avec la numération



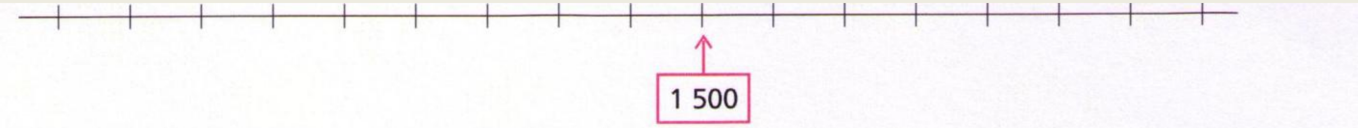


De la piste à la file

Sur la ligne, place les nombres : 1 162 1 058 1 381 978 1 257.

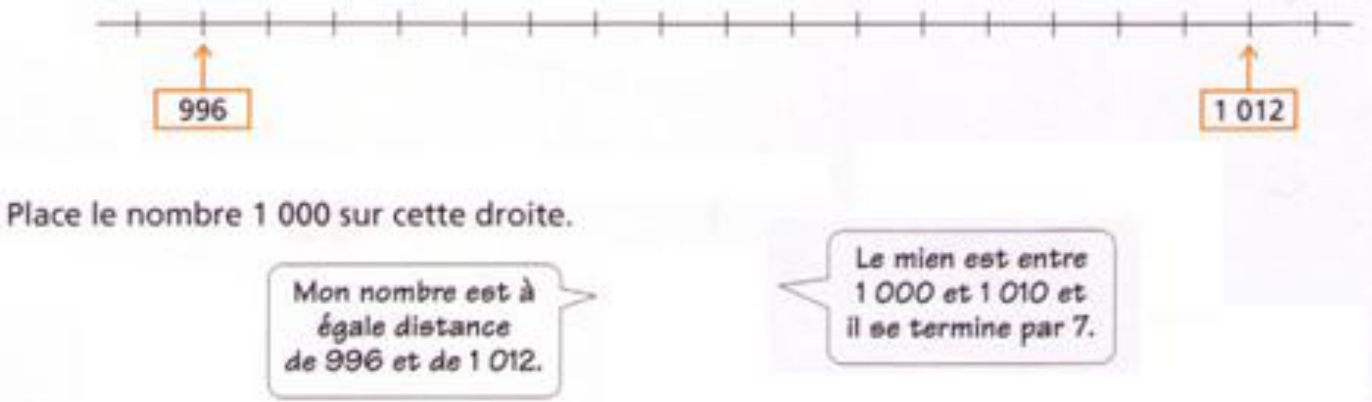


De la file à la droite numérique



Cette droite est graduée de 100 en 100.

Parmi les nombres : 900 1 050 1 250 775 2 100 1 825
quels sont ceux qui sont exactement sur un trait de graduation ?
Souligne-les et place-les sur la droite.
Place ensuite les autres nombres entre les graduations, avec un point vert.



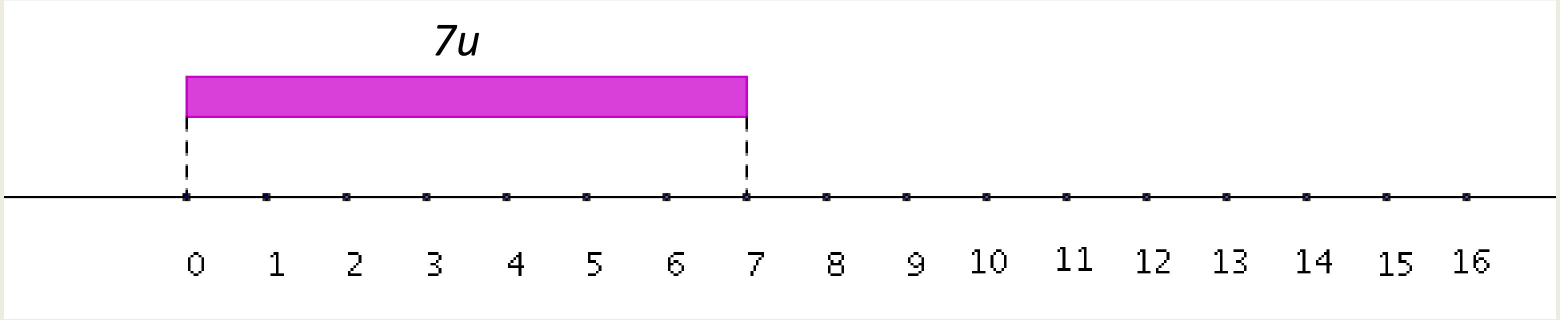
Place le nombre 1 000 sur cette droite.

Exemple de double appui : 1012 – 996 = 16 ; la moitié c’est 8 donc 996 + 8 = 1004

La droite graduée et la mesure (CE2)

C'est un changement de point de vue : on passe du discret au mesurable.

Un nombre désigne à la fois un point et la distance à l'origine : (aspect métrique).



Petits calculs… : calculez 84-36 puis 125-97

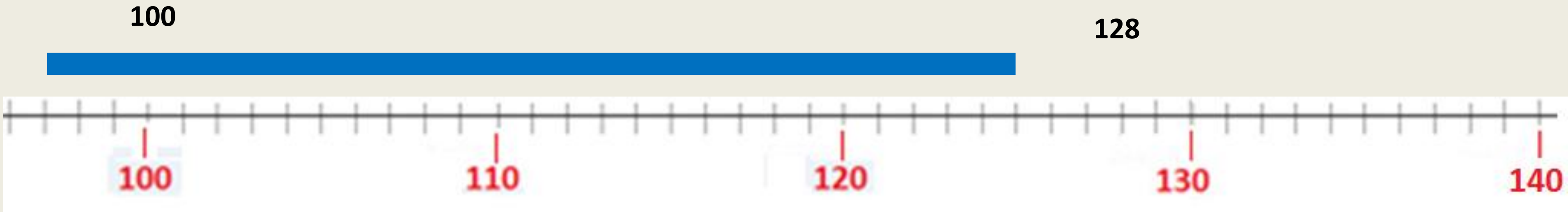
Droite graduée et soustraction

- **La technique par « démolition »**
- exemple 125-97

- **Avantage** : cette technique repose sur la compréhension de notre système d'écriture des nombres largement travaillé au cycle 2.
- **Inconvénients** :
- -Elle correspond à une manipulation à partir du matériel de numération…
- -Elle est très difficilement utilisable dans les cas où il y a un zéro intermédiaire sauf à automatiser de façon très coûteuse.
- -Cette technique devra donc être abandonnée en cycle 3 ou au collège.

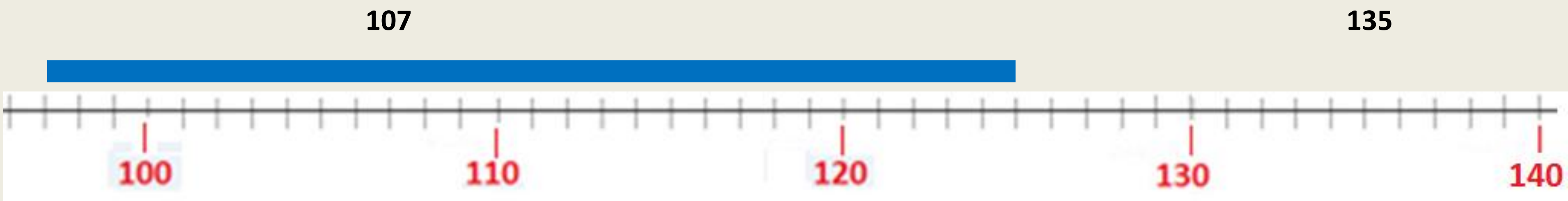
La technique « par compensation ou translation » : exemple 125-97

- Méthode « à la russe » : on cherche un nombre rond



- Méthode usuelle : on ne peut pas calculer 5-7 : on ajoute 1 dizaine à 125 et pour conserver l'écart on ajoute 1 dizaine à 97.

$$\begin{array}{r} 125 \\ \underline{-97} \end{array}$$



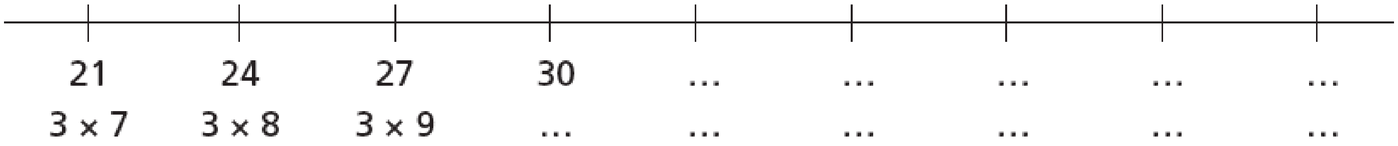
avantage : cette technique est utilisable quels que soient les nombres choisis. C'est la technique usuelle de la soustraction en France, elle sera enseignée au cycle 3. Les élèves qui l'auront apprise en CE1 n'auront pas besoin de changer de technique au cycle 3.
inconvénient : elle nécessite de prendre le temps de travailler la propriété de conservation des écarts, sur laquelle elle repose.

L'algorithme de la soustraction en CE1 se construit donc à partir d'une bonne connaissance de la droite graduée.

Technique définitive

Droite graduée et multiplication

1

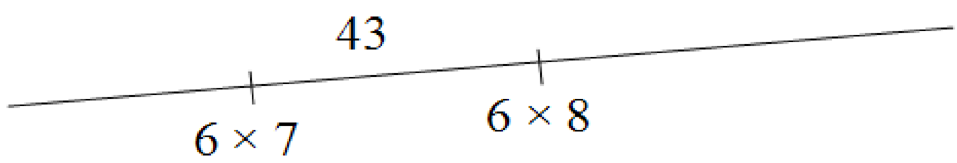


a. Reproduis cette droite graduée de 3 en 3.
Sous chaque graduation, complète avec un nombre et un produit.

b. Place approximativement le nombre 41 sur cette droite.

c. Encadre 41 par deux multiples consécutifs de 3 : $3 \times \ldots < 41 < 3 \times \ldots$

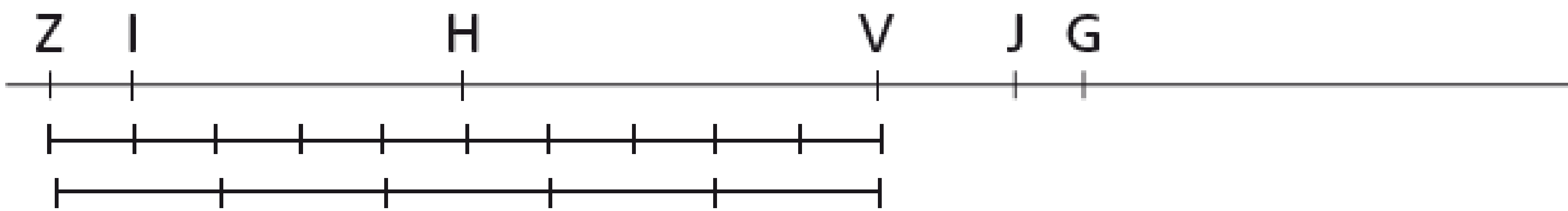
Droite graduée et division



« Quand on encadre 43 par deux multiples consécutifs de 6 et que l'on écrit 43 = (6 x 7) + 1, on dit que l'on fait la division de 43 par 6. Dans cette division, le nombre 7 s'appelle le quotient. C'est le nombre de fois où 6 est contenu dans 43. 1 s'appelle le reste. »

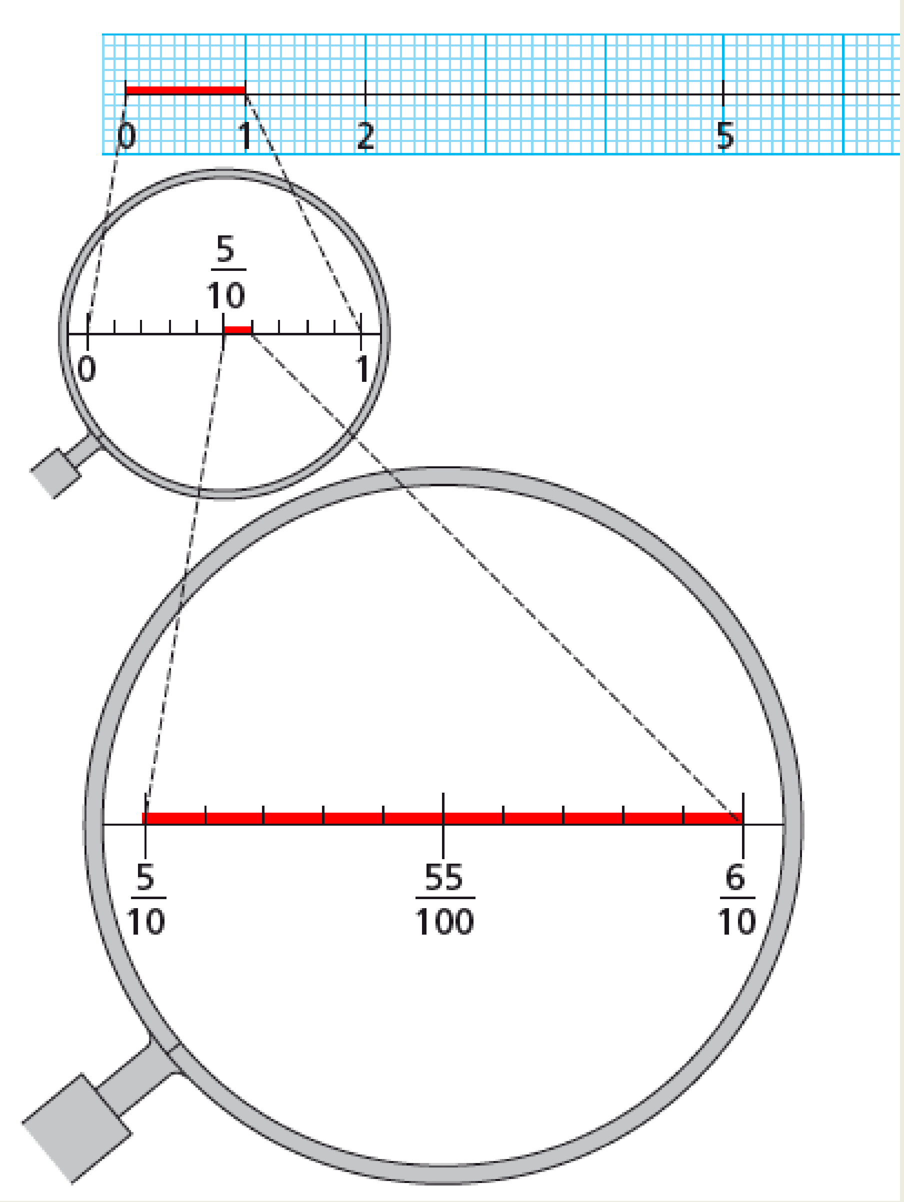
Droite graduée et fractions

a. Donne la position des points G, H, I et J sur la droite.



b. Sur cette droite place les fractions : $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{15}{10}$ $\frac{7}{10}$

Droite graduée et densité des décimaux

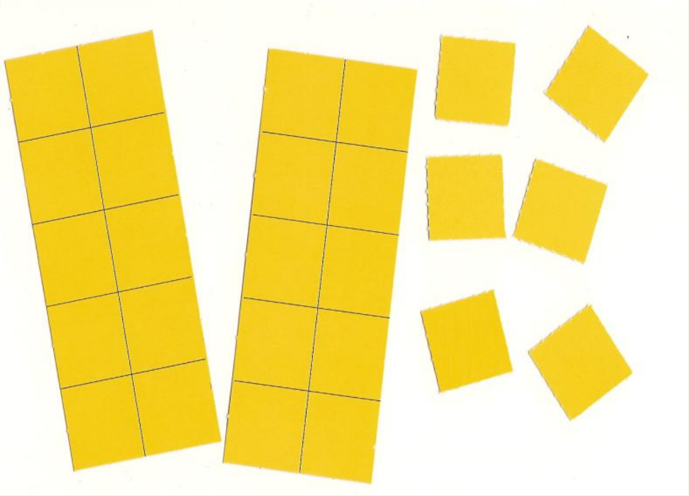


2-2
Numération : le travail sur les dizaines et centaines est fondamental

Rappel : en CP

Extraits de cette situation d’évaluation

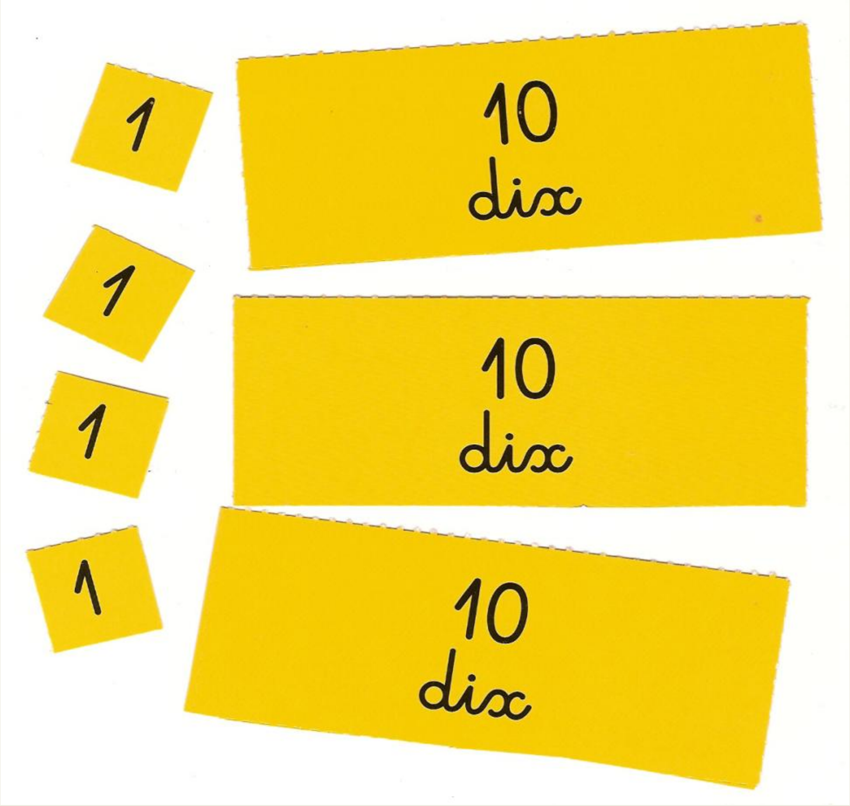
Première phase



Pour calculer ce score, les élèves peuvent utiliser trois niveaux de procédures :

- Compter un par un chaque case jaune
- Compter les plaques de 10 (en disant : « dix, vingt ») puis compter un par un les plaques jaunes
- Utiliser directement la symbolisation 20+ 6=26

Deuxième phase
Le comptage un par un de toutes les cases jaunes n’est plus possible



Troisième phase : le jeu de la marchande

Les procédures pour quantifier la somme est de même nature qu'au jeu de la dizaine

Quatrième phase : Travail sur les écritures chiffrées

Complète.

56, c'est ...... dizaines et ...... unités.

63, c'est ...... unités et ...... dizaines.

4 dizaines et 9 unités, c'est ....

7 unités et 2 dizaines, c'est ....

Réinvestissement dans des contextes sans matériel

Avec 34 chocolats, combien de boîtes de 10 chocolats peut-on remplir ?

On peut remplir .... boîtes
et il reste .... chocolats.

Une observation d’élève en situation de remédiation en CE2

Le milieu affiche trois niveaux :
Les boîtes étiquetées,
Les enveloppes,
Les jetons.
L’élève peut passer d’un niveau à l’autre.

- Il est nécessaire d’avoir compris le système d’écriture chiffrée pour passer au calcul.

  par exemple erreurs relevées en CE2

- Pour ces deux calculs

  2000+300+40+7

  2000+40+7

le taux de réussite n’est pas le même

- *En réponse à la question* : pose et calcule 3 0 8 + 6 3

  un nombre non négligeable d’élèves font des erreurs de position

```
   3 0 8
 + 6 3
 ---------
```

.

La numération orale

– des mots-nombres , combien ?...

(chiffres , multiples de la base, puissances de la base, « anomalies »)

-- règles de juxtaposition des mots-nombres pour former des noms de nombres :

La juxtaposition des mots a une valeur opératoire (addition, multiplication)

Numération de type hybride

Sept mille huit cent quatre-vingts

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

7 1000 8 100 4 20

$$(7 \times 1000) + (8 \times 100) + (4 \times 20)$$

C’est la décomposition « auditive »

- Ces systèmes sont comme des « langues »,
- le fait de passer de l'un à l'autre relève de la traduction et non de la lecture/dictée.

- *Dans l'organisation des séances, nous proposons des étapes « numération » et des étapes « activités numériques » : elle sont liées mais ne peuvent être confondues.*

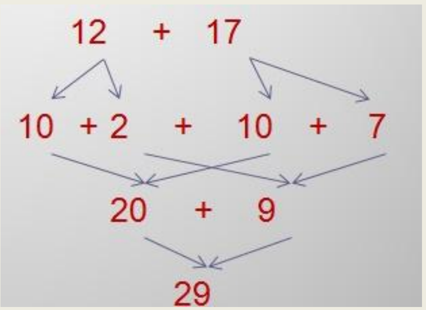
2-3
Une construction progressive des algorithmes

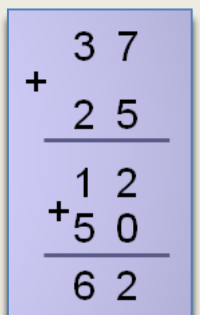
Rapport entre calcul et construction du sens des opérations

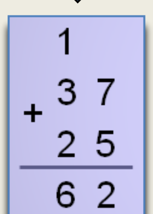
- Ce rapport est dialectique
- **Historiquement des mouvements contradictoires**
  - d'abord le calcul puis les problèmes
  - d'abord les problèmes puis le calcul
- **Actuellement avancée simultanée du travail sur les problèmes et du travail sur les procédures de calcul**.
- Penser alors à construire des algorithmes provisoires faciles à élaborer avec les élèves.

Pour cela, construire des algorithmes évolutifs aux cycles 2 et 3.

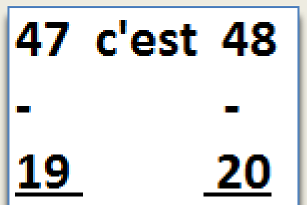
Addition

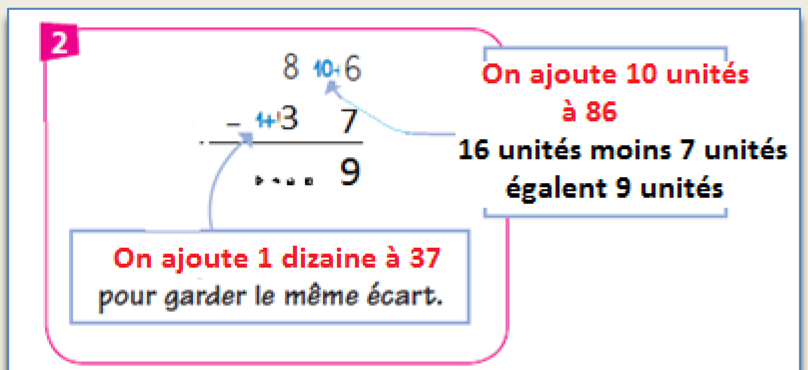




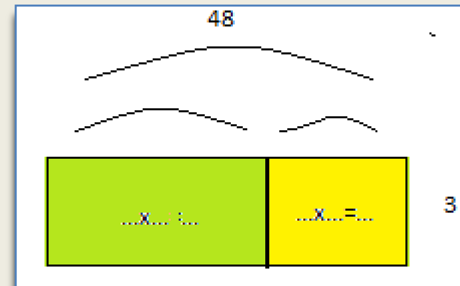


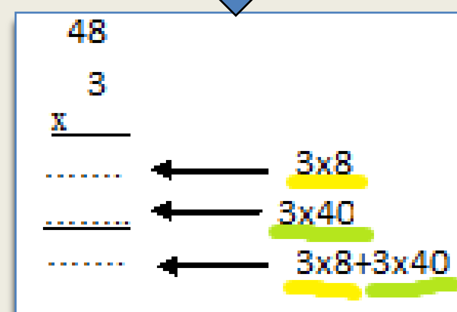
Soustraction

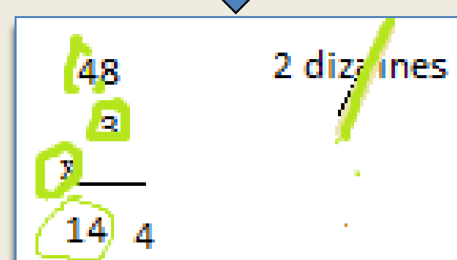




Multiplication

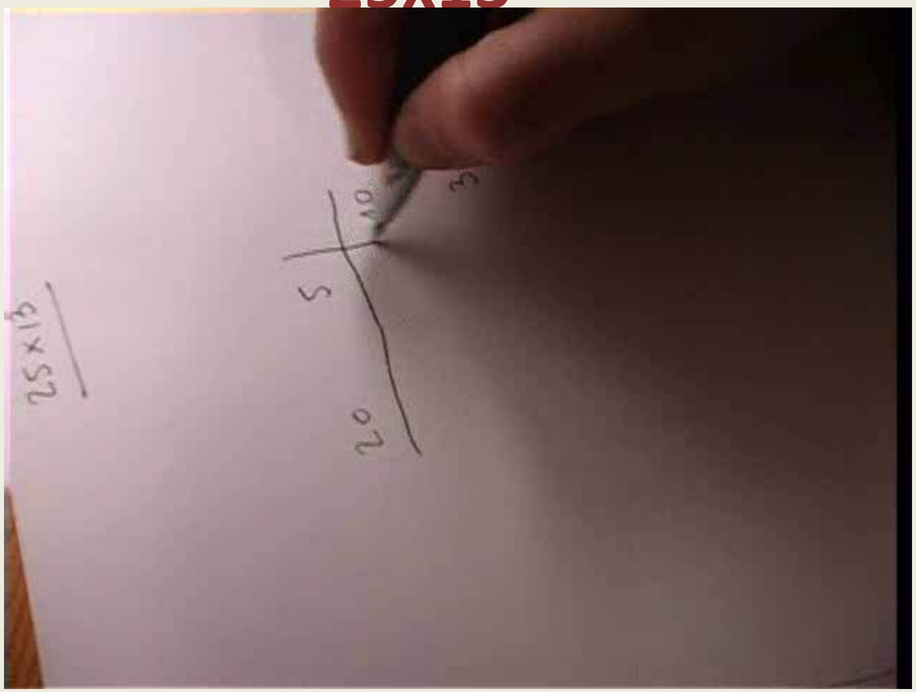


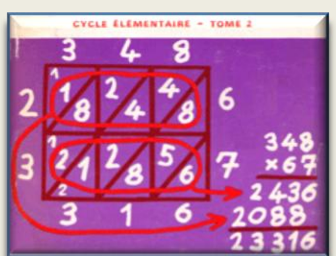




L’exemple de la multiplication

25x13





Au seuil de réussite acceptable de 70%, pour la taille 8, la méthode classique permet 12 réussites sur 25 élèves soit 48%. L’autre méthode permet la réussite de 22 élèves soit 88%. Le gain est de 40%. Il augmente avec la taille des multiplications.

L’amélioration est plus forte chez les élèves moyens.

Recherche Université Bordeaux I (1973) réalisée auprès de 150 enfants de CM.

Rappel : Méthode Per Gelosia

25

20	5	
20x10 = 200	5x10 = 50	10
20x3 = 60	5x3 = 15	3

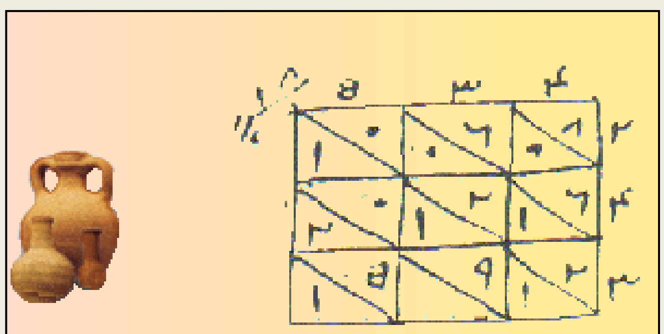
13

2	5	
0 / 2	0 / 5	1
0 / 6	1 / 5	3

3

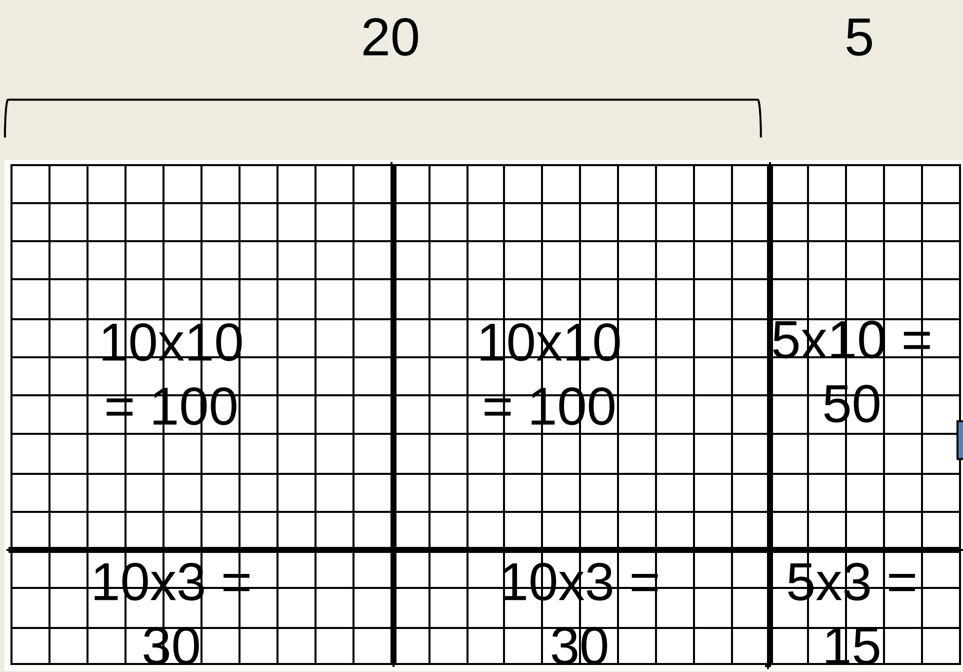
2 5

200 + 50 + 60 + 15
325


Produit arabe : **534 x 342**
Histoire universelle des chiffres Ifrah

Résultat
325

Au CE2



25

20	5	
20x10 = 200	5x10 = 50	10
20x3 = 60	5x3 = 15	3

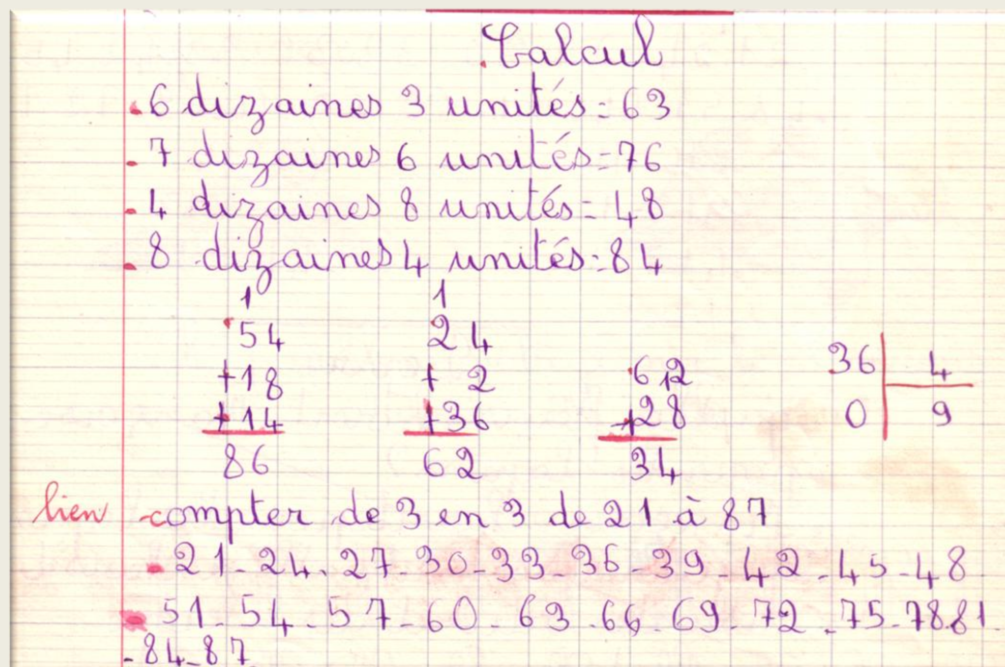
13

15 + 60 + 50 + 200
325

$$
\begin{array}{r}
25 \\
\underline{\times\ 13} \\
15 \\
60 \\
50 \\
\underline{200} \\
325
\end{array}
\qquad\longrightarrow\qquad
\begin{array}{r}
25 \\
\underline{\times\ 13} \\
75 \\
\underline{250} \\
325
\end{array}
$$

L’exemple de la division

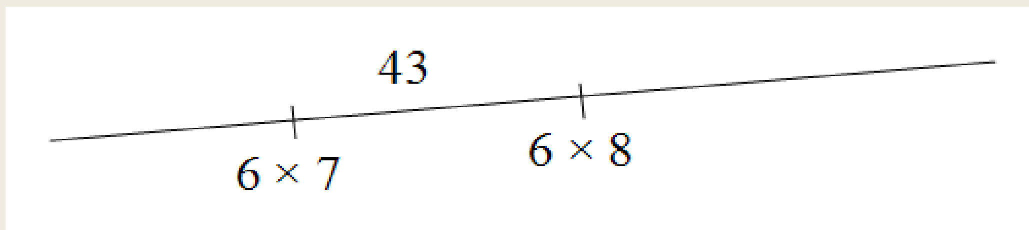
- Au CP : partages équitables simples.
- Enseigner la division au CE1 (nombres inférieurs à 100) consiste avant tout à proposer des situations fondées sur des partages équitables de collections et sur des multiplications à trous simples. (2 et 5).
- Attention aux effets d’annonce…



Au CE2.

-Programmes 2008 : « *connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre.* »

- Appui sur la culture acquise de la file numérique et de la droite numérique :



« Quand on encadre 43 par deux multiples consécutifs de 6 et que l'on écrit 43 = (6 x 7) + 1, on dit que l'on fait la division de 43 par 6. Dans cette division, le nombre 7 s'appelle le quotient. C'est le nombre de fois où 6 est contenu dans 43. 1 s'appelle le reste. On dispose le calcul comme ceci : »

$$\begin{array}{l|l} 43 & 6 \\ \cline{2-2} 1 & 7 \end{array}$$

Au CM1.

Un éleveur de volailles veut expédier des œufs par boîtes de 24. Il a 439 œufs. Combien de boîtes doit-il prévoir ?

•**Au début**, vérification expérimentale des prévisions obtenues (par calcul réfléchi) à l’aide d’un milieu matériel.

•**plus tard,** vérification syntaxique :

• exemple : 7053 divisé par 34 :

$$34 \times 100 < 7053 < 34 \times 1000$$

•**Le milieu est changé. Ces ruptures, sont organisées par le professeur sur une période longue. (chantier)**

7053	34
− 6800	$34 \times 200 = 6800$
253	$34 \times 7 = 238$
− 238	
15	

207 reste 15

Organisation pour la construction d'un algorithme

- Premier temps : travail sur des problèmes
  - résolution par des méthodes personnelles empiriques
- Deuxième temps : prise en compte de ces différentes procédures par l'enseignant
  - pour les identifier, les « mutualiser », de les rendre opératoires, les faire évoluer en jouant sur les variables didactiques de la situation
- Troisième temps : deux chantiers
  - Un travail sur de nouveaux énoncés pour permettre aux élèves de construire des classes de problèmes qui peuvent être résolus par des procédures similaires
  - **Un travail décontextualisé de construction progressive de méthodes expertes de calcul réfléchi et de calcul automatisé**
- Quatrième temps : retour aux problèmes pour
  - Enrichir le sens des opérations étudiées
  - investir les méthodes construites, les faire fonctionner, se les approprier de manière à les rendre automatisées
- Entraînement constant au calcul réfléchi et automatisé

Maintenir un décalage entre les champs numériques

- Pour étudier la numération
- Pour étudier les opérations et construire progressivement des procédures de calcul.

2-4
Etude détaillée : les décimaux

LA
DISME,

Enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz,
tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes.

Premierement descripte en Flameng, et maintenant convertie en François,
par SIMON STEVIN *de Bruges.*

Décidons d'écrire $\frac{3}{10}$ $\frac{7}{100}$ $\frac{5}{1\,000}$

de la façon suivante : $3^{\textcircled{1}}$ $7^{\textcircled{2}}$ $5^{\textcircled{3}}$

c'est-à-dire 3 Primes 7 Secondes 5 Tierces.

Semblablement $8^{\textcircled{0}}$ $9^{\textcircled{1}}$ $3^{\textcircled{2}}$

valent $8\ \frac{9}{10}\ \frac{3}{100}$, ensemble $\frac{893}{100}$.

Intérêt des nombres décimaux

- Approcher d'aussi près que l'on souhaite tout nombre réel
- Exprimer la mesure de grandeurs continues avec l'approximation voulue
- Prolonger sans coût les règles algorithmiques de calcul de notre numération décimale écrite des nombres entiers.

Des p’tits trous, encore des p’tits trous…

- Avec les décimaux et les fractions on doit couvrir toute la droite numérique ??
- Eh ! non….

- Les Pythagoriciens montrent que la mesure de « ? » n’est pas une fraction… mais 1,414 suffit dans les activités humaines traditionnelles.

Il y a donc toutes sortes de nombres !

- **Trois petits problèmes**

Avec 13 billes, 4 lots, combien de billes par lot?

Avec une bande de 13 cm, 4 morceaux de même longueur, quelle longueur pour chaque morceau?

Avec une bande de 13 cm, 3 morceaux de même longueur, quelle longueur pour chaque morceau?

L’ordre dans les nombres décimaux

Essayons de ranger les « mots » suivants comme s’ils étaient dans un dictionnaire (les lettres étant 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) :

1002 10134 102 10056 13

- L’ordre des décimaux est le même que celui du dictionnaire. Ce n’est pas celui des entiers naturels.

Comment introduire ces « nouveaux nombres »?

Les objectifs à atteindre

- Prendre conscience de l’insuffisance des entiers pour résoudre certains problèmes
- Envisager de nouveaux nombres pour résoudre ces problèmes
- Faire le lien entre ces nombres et les entiers
- Prolonger à ces nombres l’ordre des entiers
- Concevoir qu’entre ces nouveaux nombres, on peut toujours en intercaler un autre
- Prolonger à ces nouveaux nombres les opérations
- Utiliser ces nouveaux nombres dans des situations d’approximation notamment dans le cadre de la mesure des grandeurs
- Utiliser ces nouveaux nombres dans des problèmes variés

Des points d'appui

- La construction de fractions simples et surtout de fractions décimales est justifiée par le fait qu'elle est utile à une compréhension correcte des nombres décimaux

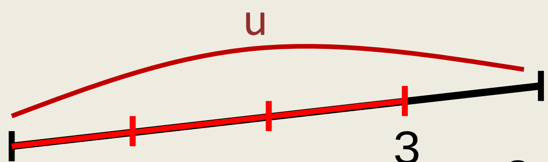
$$12 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} = 12{,}54$$

- Pour les fractions décimales, le passage à l'écriture à virgule est une simple convention

- Ce sont les fractions décimales qui permettent de travailler la signification des chiffres qui composent la partie décimale d'un décimal

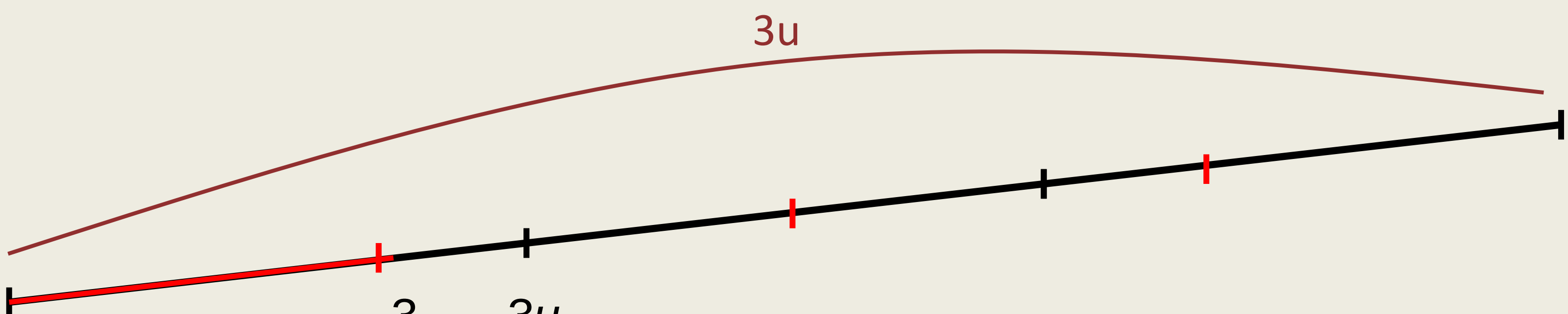
Deux conceptions des fractions

-« 3 quarts » renvoie au partage d'une grandeur unité (de mesure 1) qui est fractionnée en 4 parts égales (les quarts) et l'on prend 3 de ces quarts. Dans ce cas, on parle de « fractionnement de l'unité ».



$$\frac{3}{4}u = 3\text{x}\frac{1u}{4}$$

-« 3 divisé par 4 » renvoie au partage d'une grandeur de mesure 3 qui est partagée en 4 grandeurs de mesure égale (cela peut être un segment de mesure 3, cela peut être 3 pizzas, etc.). On parle de « commensuration »



$$\frac{3}{4}u = \frac{3u}{4}$$

C'est cette seconde conception qui donne du sens à la « fraction quotient ».
« Pour faire 3 il en faut 4 » ; « 4*x*=3 »

Nos choix

- Les fractions et les décimaux doivent apparaître comme de nouveaux nombres, utiles pour résoudre des problèmes que les entiers ne permettaient pas de résoudre :

  - Problèmes de partage

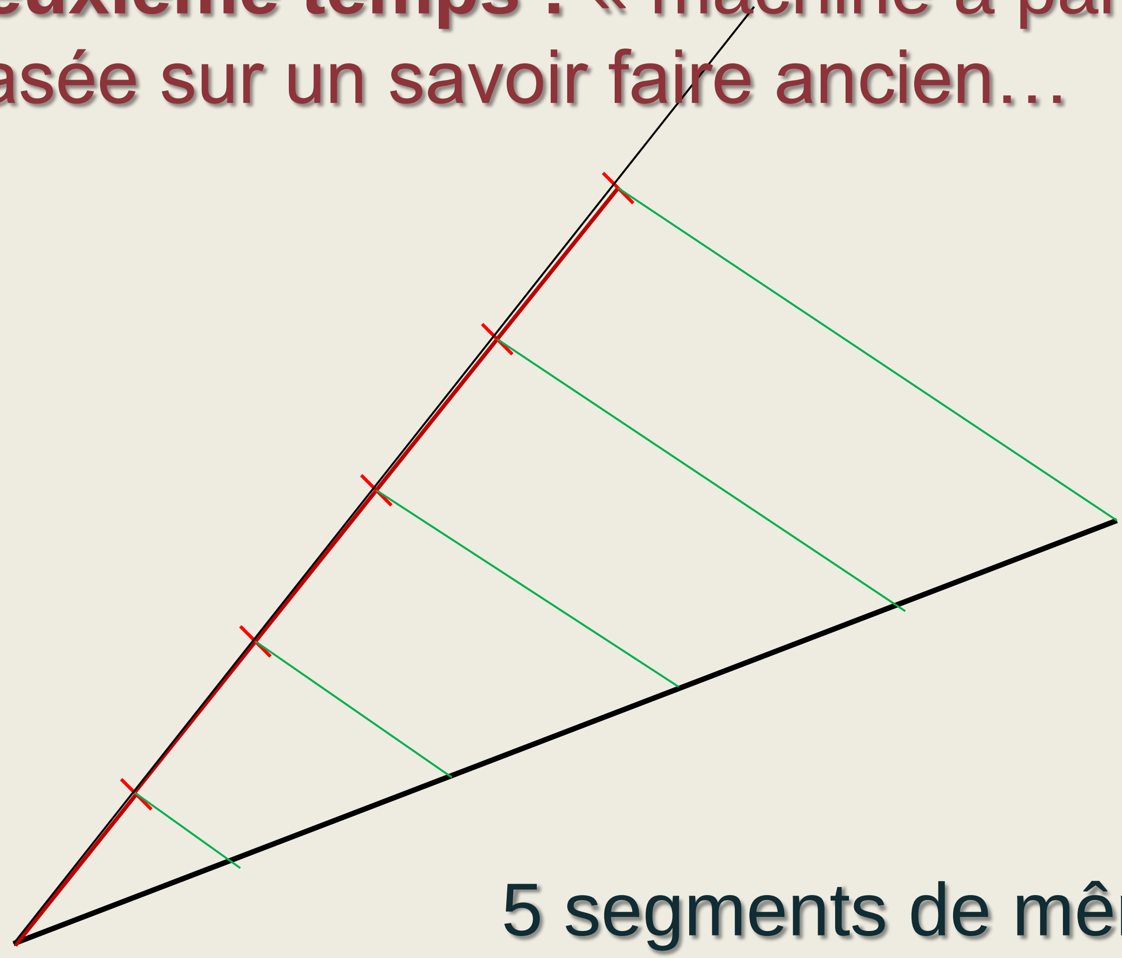
  - Problèmes de mesures de longueur et d'aire

  - Problèmes de repérage d'un point sur une droite

Premier temps

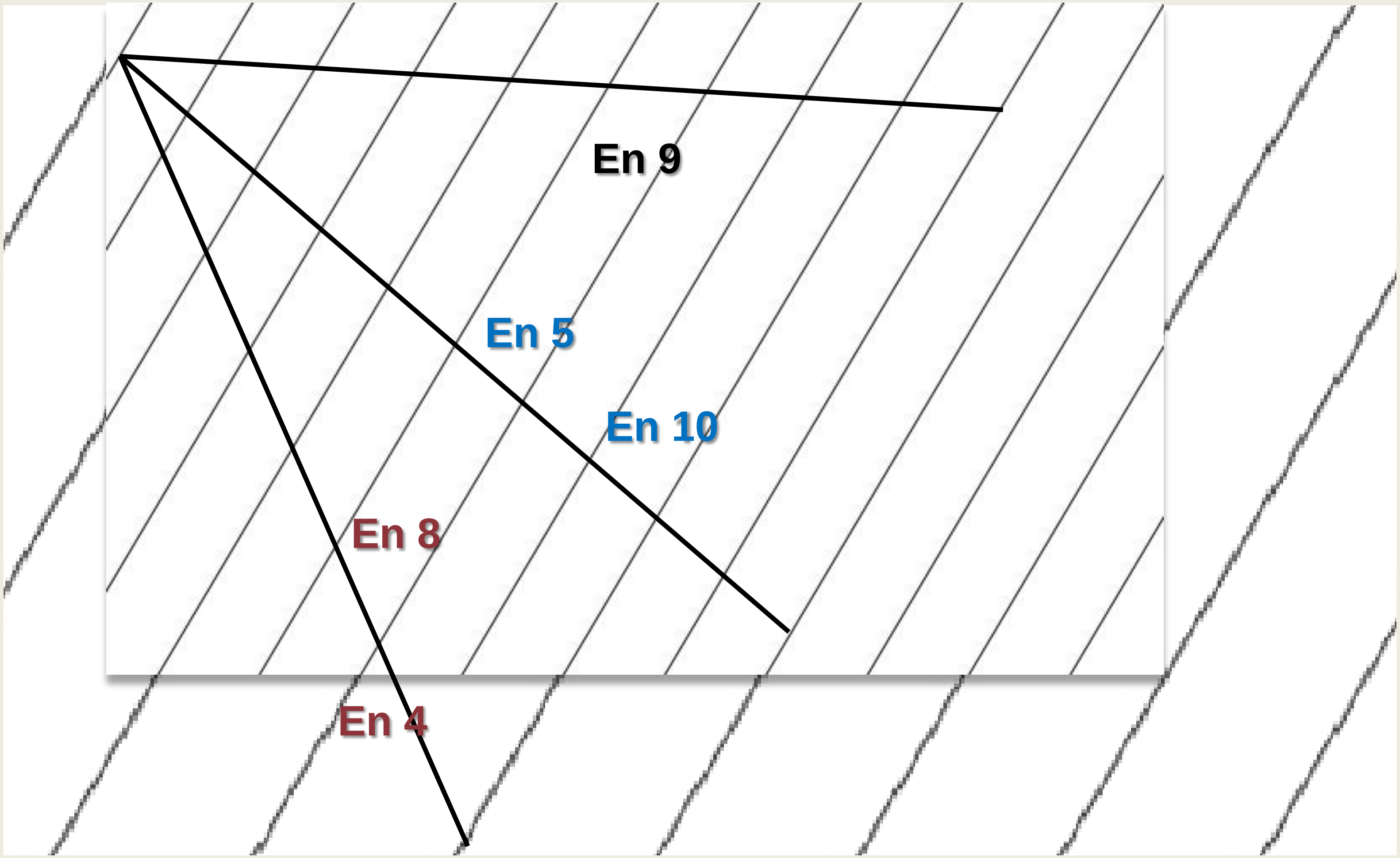
- Evocation de situations quotidiennes dans lesquelles les fractions sont utilisées,
- Partage de bandes par pliage.

Deuxième temps : « machine à partager »
Basée sur un savoir faire ancien…



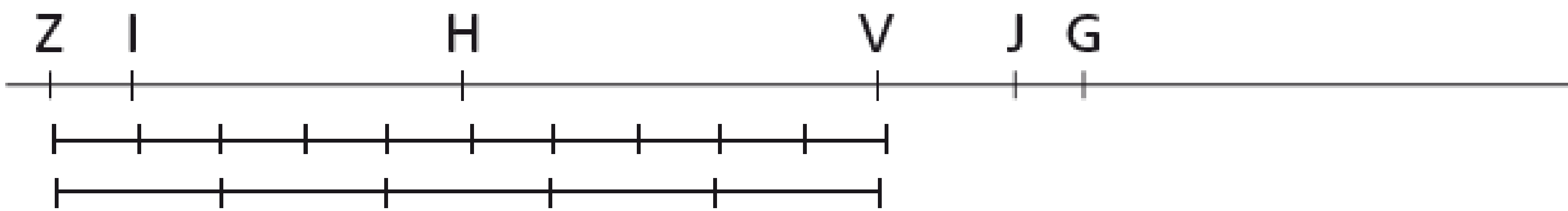
5 segments de même mesure

Fractions plus riches, notamment les fractions décimales



Troisième temps

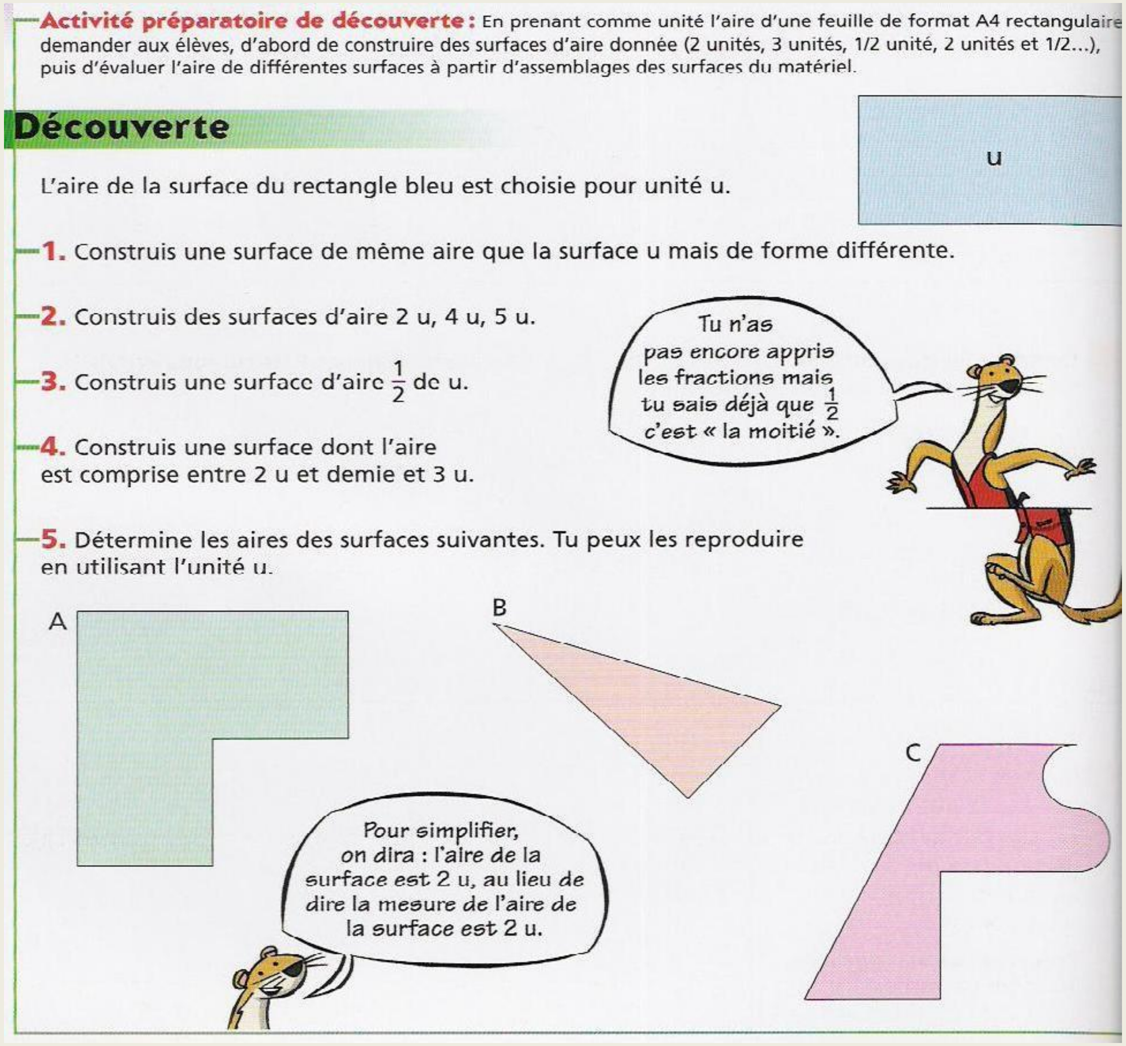
a. Donne la position des points G, H, I et J sur la droite.



b. Sur cette droite place les fractions : $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{15}{10}$ $\frac{7}{10}$

Quatrième temps

Les fractions permettent aussi d’exprimer la mesure de l’aire de figures planes dès lors que l’on a choisi une aire unité.



Activité préparatoire de découverte : En prenant comme unité l’aire d’une feuille de format A4 rectangulaire demander aux élèves, d’abord de construire des surfaces d’aire donnée (2 unités, 3 unités, 1/2 unité, 2 unités et 1/2...), puis d’évaluer l’aire de différentes surfaces à partir d’assemblages des surfaces du matériel.

Découverte

u

L’aire de la surface du rectangle bleu est choisie pour unité u.

1. Construis une surface de même aire que la surface u mais de forme différente.

2. Construis des surfaces d’aire 2 u, 4 u, 5 u.

3. Construis une surface d’aire $\frac{1}{2}$ de u.

4. Construis une surface dont l’aire est comprise entre 2 u et demie et 3 u.

5. Détermine les aires des surfaces suivantes. Tu peux les reproduire en utilisant l’unité u.

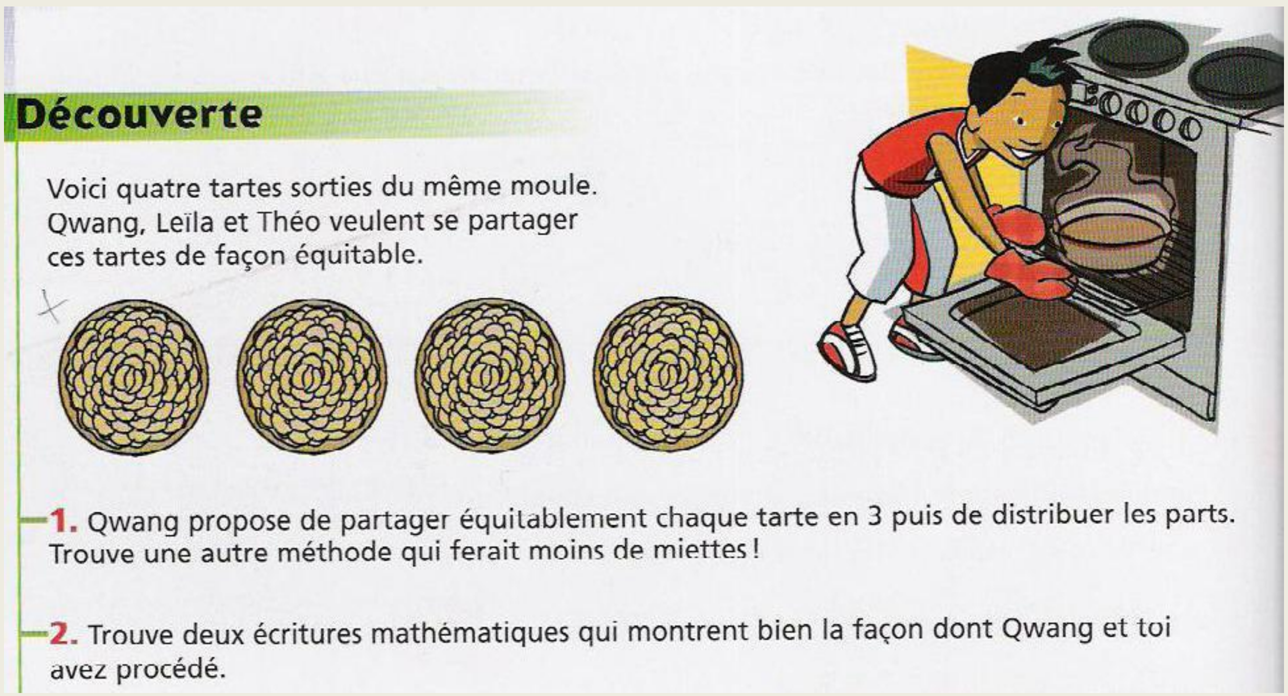
A

B

C

Cinquième temps

Une fraction supérieure à 1 peut être envisagée de deux façons



Découverte

Voici quatre tartes sorties du même moule.
Qwang, Leïla et Théo veulent se partager ces tartes de façon équitable.

1. Qwang propose de partager équitablement chaque tarte en 3 puis de distribuer les parts.
Trouve une autre méthode qui ferait moins de miettes !

2. Trouve deux écritures mathématiques qui montrent bien la façon dont Qwang et toi avez procédé.

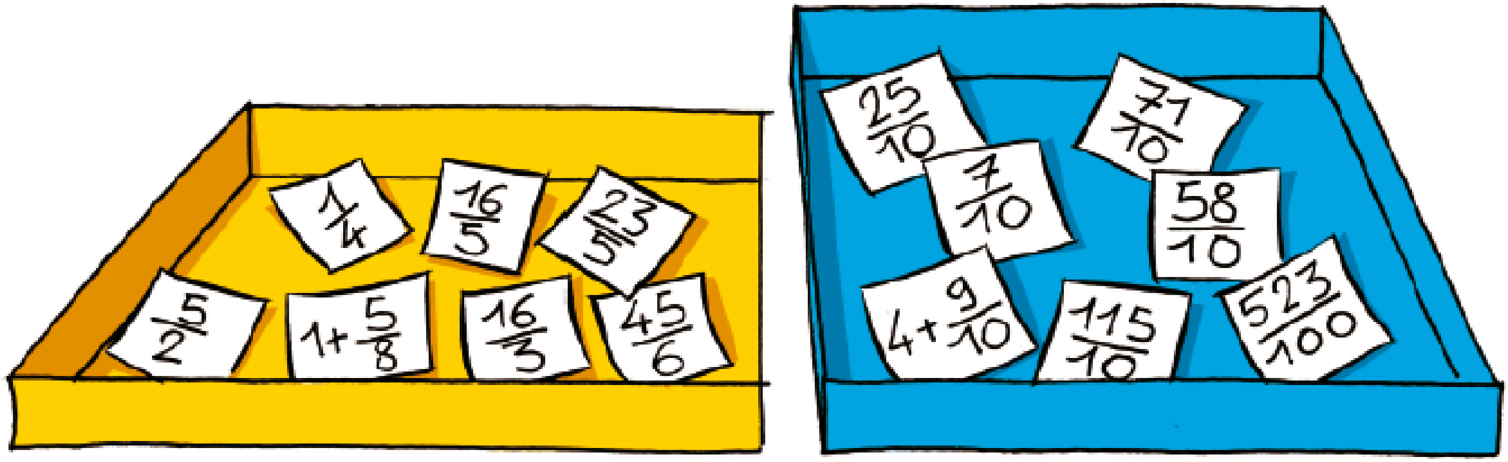
$$\frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

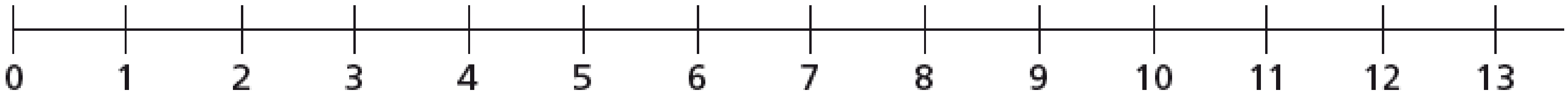
Sixième temps

- Les fractions décimales

… Et pourquoi elles?



Tu dois encadrer les nombres écrits sur les étiquettes par deux entiers consécutifs.
Tu peux choisir les nombres de la boîte jaune ou les nombres de la boîte bleue.
Effectue les encadrements. Place approximativement les nombres sur une droite graduée comme celle-ci.



Quelle boîte as-tu choisie et pour quelles raisons ?

Rester proche de la droite numérique

A ce stade, l'égalité 3/4=0,75 se conçoit par passage à 75/100 par coïncidence sur la droite et non par division.

-L'identification de ¾ à 0,75 devrait s'effectuer au collège et autrement qu'en présentant la division comme une évidence.

Septième temps : les nombres décimaux : écritures chiffrées des fractions décimales (Stevin)

$$12 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} = 12{,}54$$

Convention d’écriture. Pas de mathématiques : de l’ergonomie… bien utile !

A propos des notations…

Notre dame de la Garde à Marseille…

Quelques chiffres impressionnants :

Altitude de la colline	147,85 m
Hauteur des remparts	13,15 m
Hauteur de la Tour	33,80 m
Hauteur du piédestal de la statue	12,50 m
Hauteur de la statue monumentale	9,72 m
Poids de la statue	9,796 kg
Tour du poignet de l'enfant Jésus	1,10 m
Poids du Bourdon	8,234 kg
Hauteur du Bourdon	2,50 m
Poids du battant	387 kg

Un manuel de mathématiques CM au Mexique

Ampliar el conocimiento sobre los decimales

LECCIÓN 37

Las apariencias engañan

1. En esta lección ampliarás tus conocimientos sobre los decimales. Pon mucha atención porque, a veces, las apariencias engañan.

- Ana dijo: **Mi cinta de medir tiene 2.30 metros de largo.**

Paula dijo: **La mía es más grande, ¡tiene 200 centímetros y 300 milímetros!**

¿Es cierto lo que dijo Paula? ____________ ¿Por qué? Discútelo con tus compañeros. Luego anota la conclusión que obtuviste con base en la discusión.

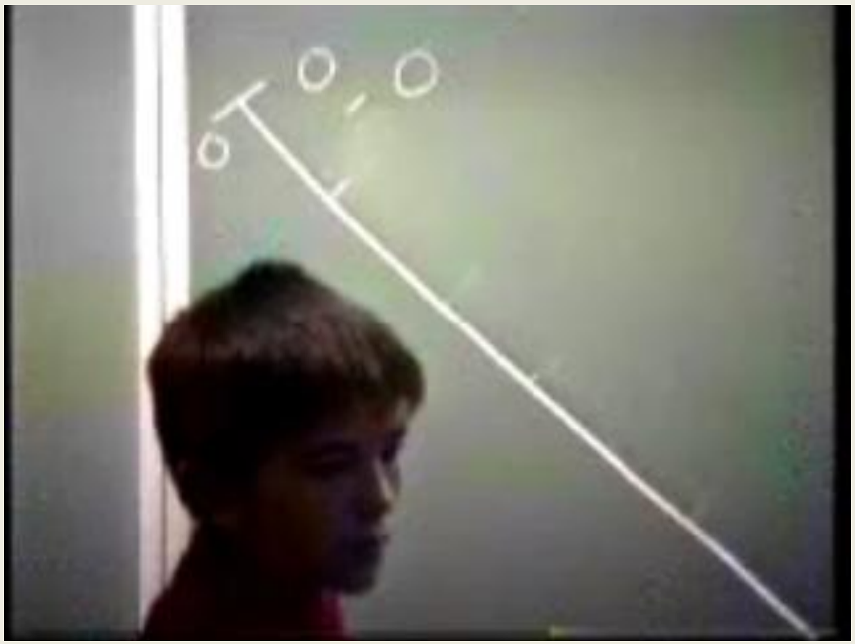
____

____

Las siguientes son las medidas de cuatro listones que Paula cortó. Ordénalas empezando por la menor: 5.25 m, 5.19 m, 5.3 m, 5.1740 m.

Huitième temps : l'ordre dans les décimaux

Le travail sur la droite numérique révèle des difficultés et connaissances erronées



Neuvième temps : l’addition des nombres décimaux ; problèmes

$$1{,}45 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}$$

$$2{,}7 = 2 + \frac{7}{10}$$

$$\begin{array}{r} 1{,}45 \\ +\ 2{,}7 \\ \hline \end{array}$$

Le cas du produit d'un décimal par un entier, tout va bien!

a. Théo

$$\begin{array}{r} 2,35 \\ +\ 2,35 \\ +\ 2,35 \\ +\ 2,35 \\ \hline \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

b. Qwang

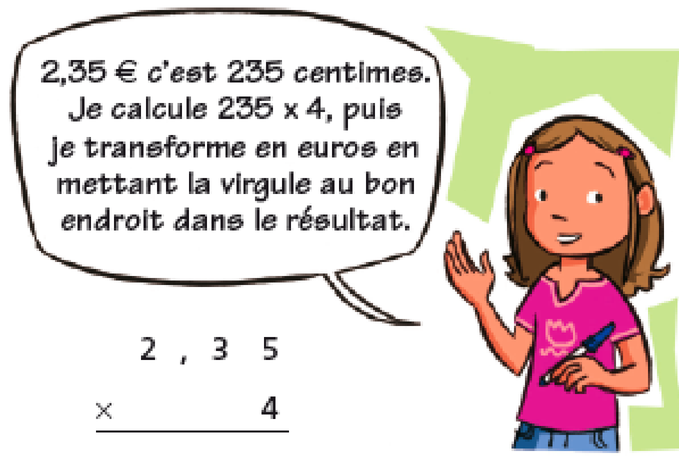
	2	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{100}$
4	$4 \times 2 = \ldots$	$4 \times \frac{3}{10} = \ldots$	$4 \times \frac{5}{100} = \ldots$

$2{,}35 \times 4 = \ldots$

c. Leïla propose alors la multiplication en colonne, pas à pas.

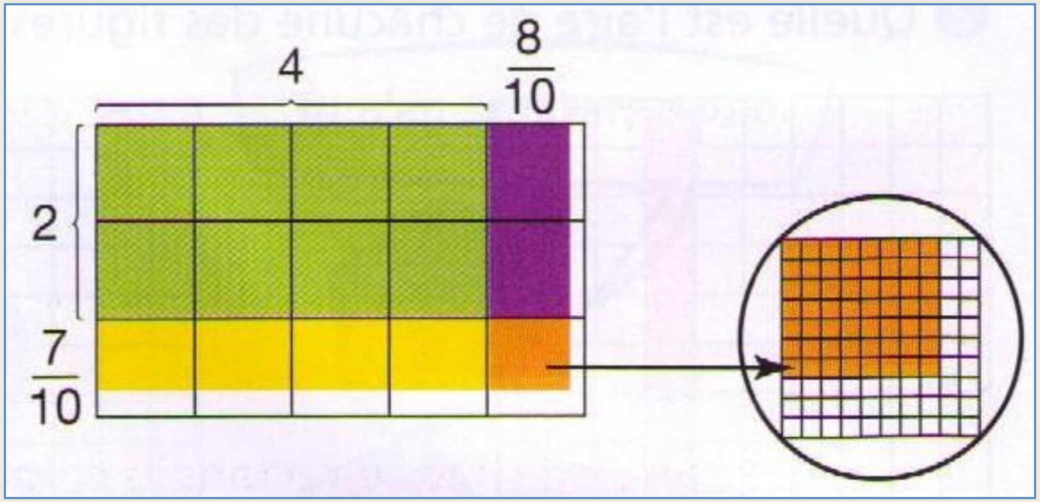
$$\begin{array}{r} 2,35 \\ \times\ \ \ 4 \\ \hline \ldots\ldots\ldots \leftarrow 4 \times 0{,}05 \\ \ldots\ldots\ldots \leftarrow 4 \times 0{,}3 \\ \ldots\ldots\ldots \leftarrow 4 \times 2 \\ \hline \ldots\ldots\ldots \leftarrow 2{,}35 \times 4 \end{array}$$

d. Alice



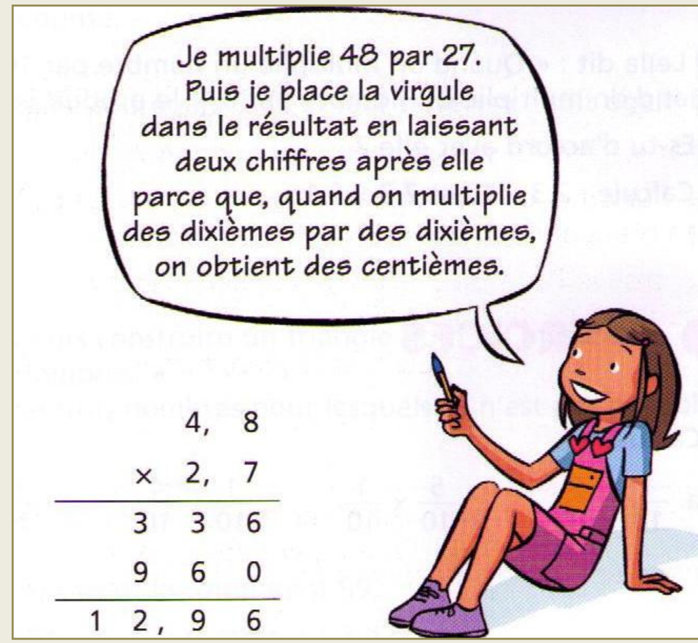
$$\begin{array}{r} 2,35 \\ \times\ \ \ 4 \\ \hline \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Produit de deux nombres décimaux : un saut « énorme »…



	4	$\frac{8}{10}$
2	......	......
$\frac{7}{10}$	......	......

$4{,}8 \times 2{,}7 = \ldots\ldots$



Qui serait raisonnable d'effectuer en 6°…

La division décimale avec quotient décimal

Moi, je pose la division de 4,25 par 3.
Quand je retranche 3 au dividende, il reste 1,25.
Je cherche par combien de dixièmes je dois
multiplier 3 pour approcher 1,25, je trouve
4 dixièmes car 3 × 0,4 = 1,2.
Puis je retranche 1,2 à 1,25 je trouve 0,05 et je
continue en cherchant par combien de centièmes
je dois multiplier 3 pour approcher 0,05.

$$\begin{array}{r|l} 4,2\;5 & 3 \\ \cline{2-2} -\;3 & 1,4 \\ \cline{1-1} 1,2\;5 & \\ -\;1,2 & \\ \cline{1-1} 0,0\;5 & \end{array}$$

Qui serait raisonnable d'effectuer en 6°…

2-5
Des lacunes qui perdurent dans les programmes français.

L’enseignement des statistiques-probabilités.

Une expérimentation initiale d’enseignement des statistiques conduite en 1975 proposait de *« trouver un moyen sûr de connaître la composition d’une bouteille opaque contenant 5 billes : des noires et des blanches ».*
Il est possible, par retournement de la bouteille, de voir à chaque fois une bille et une seule. (Tirage avec remise), la bouteille ne pouvant pas être ouverte.

- Document Ecole J Michelet (Talence) 1975. Classe de CM2
- Document IUFM, Lycée Victor Louis (Talence) 2008. Classe de seconde.

Conclusion : questions à se poser

- Pouvez nous statuer précisément sur le type de séance que nous proposons (apprentissage par familiarisation ou par adaptation, consolidation, évaluation, …) ?
- S'il s'agit d'une situation d'apprentissage, comment les élèves se rendent compte qu'ils ont réussi ou échoué ?
- Quelle consigne de travail a été préparée ? (plus qu'une préparation détaillée, l'écriture précise de la consigne qui sera donnée est un outil précieux)
- S'il y a manipulation : sa place ? Se substitue-t-elle au raisonnement ?
- Quelle trace écrite ? (chantier en cours, résultats à retenir), place de cette trace, statut de cette trace. Son rôle dans la mémoire de la classe et son utilisation.

« Les fiches sans les situations nuisent gravement à la santé mathématique. »

Merci de m’avoir écouté et…

Meilleurs voeux.